II.3.6

$$H(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$h(t) \rightarrow \quad h_\sigma(t) = \int_0^t h(\tau)\, d\tau$$

$\bullet\!\!-\!\!\circ$ Integrationssatz

$$\frac{1}{p} H(p)$$

$$\frac{1}{p} H(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 2\xi\omega_0 + \omega_0^2}$$

Auch möglich: Polstellen berechnen und dann in zwei Partialbrüche zerlegen (aufwändiger!)

<u>Partialbruchzerlegung</u>

$$\omega_0^2 = Ap^2 + A\,2\xi\omega_0 p + A\omega_0^2 + Bp^2 + Cp$$

$p^2: \quad 0 = A + B$

$p^1: \quad 0 = 2\xi\omega_0 + C$ $\quad \longrightarrow \quad$ Koeffizientenvergleich:

$p^0: \quad \omega_0^2 = A\omega_0^2$

$B = -A = -1$

$C = -2\xi\omega_0$

$A = 1$

$$\frac{1}{p} H(p) = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \underbrace{2\xi\omega_0}_{a_1} p + \underbrace{\omega_0^2}_{a_0}} - \frac{2\xi\omega_0}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

$\boxed{\xi < 1\,!}$ $\qquad \bullet\!\!-\!\!\circ \qquad \bullet\!\!-\!\!\circ$ (26) $\qquad \bullet\!\!-\!\!\circ$ (25)

$$1 - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{-D}} \cdot e^{-\frac{1}{2}a_1 \cdot t} \left(-\frac{a}{2} \cdot \sin(\sqrt{-D} \cdot t) + \sqrt{-D} \cdot \cos(\sqrt{-D}\,t) \right)}_{(26)} - \underbrace{2\xi\omega_0 \frac{1}{\sqrt{-D}}\, e^{-\frac{1}{2}a_1 t} \cdot \sin(\sqrt{-D}\,t)}_{(25)}$$

$a_1 = 2\xi\omega_0 \qquad a_0 = \omega_0^2$

$D = \frac{1}{4}a_1^2 - a_0 = \xi^2\omega_0^2 - \omega_0^2 = (\xi^2 - 1)\omega_0^2$

$\sqrt{-D} = \sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0$

$$\Rightarrow h_0(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{-D}} e^{-\frac{1}{2}a_1 t}\left[\left(-\frac{a_1}{2} + 2\xi\omega_0\right)\sin(\sqrt{-D}t) + \sqrt{-D}\cos(\sqrt{-D}t)\right]$$

$$\Rightarrow h_0(t) = 1 - \left[\frac{-\xi\omega_0 + 2\xi\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0}\sin(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t) + \cos(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t)\right]e^{-\xi\omega_0 t}$$

$$= 1 - \left[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t) + \cos(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t)\right]e^{-\xi\omega_0 t}$$