1) Gleitpunkt-Maschinenzahlen [10 Pkt]

a) Welche Zahlen (in Dezimaler Darstellung) sind in der Menge der normalisierten Gleitpunktzahlen $M(b, p, E_{min}, E_{max})$ enthalten für $b=2, p=2, E_{min}=-1, E_{max}=1$?

b) Man bestimme die Binärdarstellung der Zahl $(0.7)_{10}$

c) Man bestimme die Darstellung von $rd(0.7)$ und $rd(2.5)$ in $M(2,2,-1,1)$, wenn als Rundung die gleiche Rundungsfunktion $rd()$ verwendet wird, die standardmäßig im IEEE 754 Standard verwendet wird (Optimale Rundung).
Wie groß ist in beiden Fällen der relative Rundungsfehler?

2) Aufgabe (Kondition/Stabilität) [10 Pkt]

a) Zu berechnen sei der Wert $f(30)$ mit $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2-1})$. Man bestimme $\kappa(f, 30)$. Wie lässt sich $f(30)$ stabil berechnen?

b) Das LGS $Ax = b$ werde durch eine Störung ersetzt durch das LGS $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$ wobei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}, \quad \Delta A = \begin{pmatrix} -0.003 & 0.002 \\ -0.003 & 0.003 \end{pmatrix}, \quad \delta b = \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.01 \end{pmatrix}$$

Offenbar gilt $x = (1, 2)^T$. Man bestimme eine obere Schranke für $\frac{\|\Delta x\|_1}{\|x\|_1}$.
Die dabei notwendige Berechnung von A^{-1} soll mittels der Regel von Cramer erfolgen, wobei alle Zwischenschritte anzugeben sind!

3) Aufgabe (Hermite Interpolation / Interpolationsfehler) [10 Pkt]

a) Zu den Daten-Werten

$$x_0 = 0, \; y_0 = 1, \; y_0' = -10$$
$$x_1 = 1, \; y_1 = 2, \; y_1' = 6, \; y_1'' = 2$$

bestimme man das Hermite-Interpolations-Polynom.

b) $f(x) = x + \sin(x)$ wird interpoliert an den Stützstellen $x_0 = \frac{\pi}{2}, x_1 = \pi, x_2 = 2\pi$. Man berechne den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = \frac{3\pi}{2}$ mit der Methode von Neville-Aitken und gebe eine zahlenmäßige Abschätzung für den Interpolationsfehler an dieser Stelle an.

4) Aufgabe (Lagrange-Interpolation) [10 Pkt]

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$ das i-te Lagrange-Polynom zu den Stützstellen $x_0, x_1, \dots x_n$.

Man zeige $\forall x \in \mathbb{R}: \sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$

5) Aufgabe (LGS) [10 Pkt]

a) Man bestimme die Cholesky-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$

b) Mit Hilfe der in a) bestimmten Cholesky-Zerlegung löse man das LGS $Ax = b$ mit $b = (8, 18, 35)^T$

c) Aus einer fremden Quelle ist die Näherungslösung $\tilde{x} = (1.1, 1.9, 3.1)^T$ für das LGS in b) bekannt. Man führe mit Hilfe der in a) berechneten Cholesky-Zerlegung einen Schritt einer Nachiteration zur Verbesserung der Näherungslösung $\tilde{x}$ aus.

d) Man bestimme die Iterationsmatrix für das Jacobi-Verfahren zur Lösung des obigen LGS

6) Aufgabe (Nichtlineares Ausgleichsproblem / QR) [10 Pkt]

a) Gegeben sei das Modell $y = f(t, x_1, x_2) = x_1 \cos(x_2 t)$. Es sollen die Daten

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y	2	0	-2

an das obige Modell mittels kleinster Fehler-Quadrat-Methode angepasst werden. Man führe einen Schritt des Gauss-Newton-Verfahrens mit Startvektor $x^0 = (1, 1)^T$ zur Lösung dieses nichtlinearen Ausgleichsproblems durch. Das dabei zu lösende lineare Ausgleichsproblem darf über die Normal-Gleichung gelöst werden.

b) Man bestimme die QR-Zerlegung der Problemmatrix A des linearen Ausgleichsproblems, das in a) gelöst werden muss.

7) (Numerisches Differenzieren) [10 Pkt]

a) Gegeben sei $f(x) = \arctan(x)$, $x_0 = 0$

Ausgehend von der Maschenweite $h_0 = 0.5$ und der Vorwärtsdifferenz $D_1^+ f(x, h)$ bestimme man mittels Richardson-Extrapolation unter Verwendung der Romberg-Folge einen Näherungswert für $f'(x_0)$, der eine Fehlerordnung $O(h_0^3)$ hat.

b) Allgemein leite man mittels Richardson-Extrapolation unter Verwendung der Maschenweiten $2h$ und h aus der Vorwärts-Differenz eine Differenzen-Formel für die 1-te Ableitung her, die die Fehlerordnung 2 hat. Welchen Näherungswert erhält man mit dieser Formel für $f'(x_0)$, wenn $h = \frac{1}{4}$ ist?

8) Aufgabe (Numerische Integration) [10 Pkt]

Zu berechnen sei ein Näherungswert für das Integral $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

a) Welcher Wert ist für die Maschenweite h zu wählen, so dass die summierte Trapezregel einen Näherungswert für das obige Integral liefert, dessen Fehler kleiner 10^{-4} ist?

b) Ausgehend von der Maschenweite $h_0 = 1$ bestimme man mittels Romberg-Integration einen Näherungswert für das Integral, der die Fehlerordnung $O(h_0^4)$ besitzt.

c) Es sollen nun auch noch Rundungsfehler bei der Berechnung der summierten Trapezregel berücksichtigt werden. Man nehme an, dass für den numerisch berechneten Wert $\tilde{f}(x)$ gilt: $\forall x \in [0,1]: |\tilde{f}(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ wobei $f(x) = e^{-x^2}$ sei. Man leite eine Abschätzung für den Gesamtfehler der summierten Trapezregel in Abhängigkeit der Maschenweite h für das obige Integral her.

d) Mittels Gauss-Legendre-Quadratur bestimme man einen Näherungswert für das obige Integral mit $n = 2$ Stützstellen.

9) Aufgabe (Numerische Lösung einer DGL) [10 Pkt]

Gegeben sei die „Van der Pol" Differentialgleichung

$$y''(t) - \mu(1 - y^2(t)) \cdot y'(t) + y(t) = 0$$

mit $\mu = 1$ und den Anfangsbedingungen

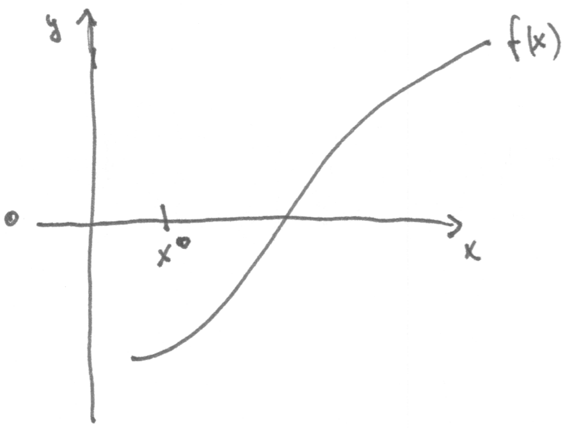
$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$$

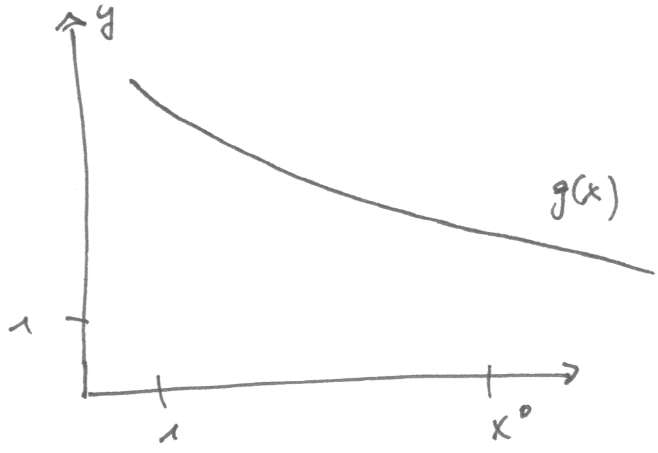
a) Man schreibe die Differentialgleichung um auf ein System 1-ter Ordnung

b) Man führe einen Schritt des Euler-Verfahrens mit der Maschenweite $h = 0.5$ durch.

c) $\vec{u}_1$ bezeichne den Näherungswert, der unter b) berechnet wurde, weiterhin bezeichne $\vec{v}_2$ den Näherungswert, der mit der Maschenweite $h = 0.25$ aus einem Doppelschritt des Euler-Verfahrens angewendet auf das in a) aufgestellte System resultiert. Man gebe mit Begründung eine Formel an, wie sich unter Verwendung von $\vec{u}_1$ der Fehler von $\vec{v}_2$ mittels Extrapolation abschätzen lässt.

10) Aufgabe (Fixpunkt-Iteration) [10 Pkt]





a) Man skizziere in der obigen linken Abb. den Verlauf des Newton-Verfahrens zur Lösung von $f(x) = 0$ und in der obigen rechten Abb. den Verlauf des Fixpunkt-Iteration zur Lösung von $g(x) = x$. Startwert sei x^0, es sind jeweils 3 Iterationsschritte auszuführen

b) Zu lösen sei das Nst.-Problem $x + \ln(x) = 0$. Man zeige, dass im Intervall $I = [0.5, 0.65]$ eine Lsg. existiert

c) Man zeige, dass das unter b) angegebene Nst.-Problem auf die folgenden Fixpunkt-Gleichungen umgeschrieben werden kann

(1) $x = -\ln(x)$

(2) $x = e^{-x}$

(3) $x = \dfrac{x + e^{-x}}{2}$

Welche sollte man verwenden?

d) Man zeige, dass die unter c) gewählte Iterationsvorschrift $\phi(x)$ eine Selbstabbildung auf I ist und bestimme mittels a-priori Fehlerabschätzung wie viel Iterationen notwendig sind, um eine Näherungslsg. mit einem Fehler, der kleiner als 10^{-8} ist, zu erhalten, wenn $x^0 = 0.5$ als Startwert verwendet wird

e) Man führe zur Beschleunigung der unter c) gewählten Fixpunkt-Iteration einen Iterationsschritt des Steffensen-Verfahrens mit $x^0 = 0.5$ aus