

15.3.12

# Modellierung / Fehler

①

Faden-Pendel:

Newton  
→  $F = m \cdot a$

$$-m \cdot g \sin(\varphi) = m \cdot (l \cdot \varphi)''(t)$$

$$\Rightarrow \text{DGL: } \varphi''(t) = -\frac{g}{l} \cdot \sin(\varphi(t))$$

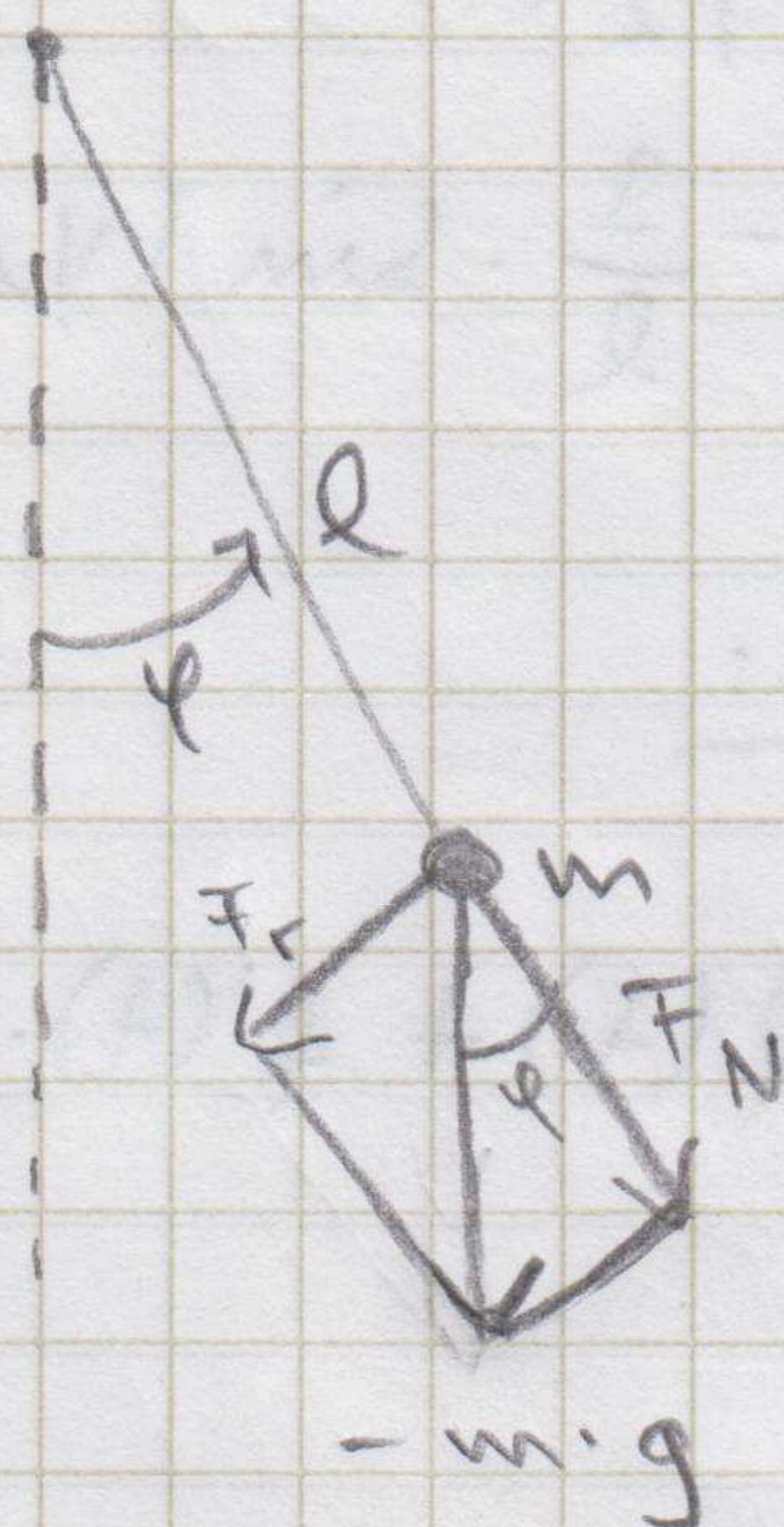
Anfangsbedingung:

$$\varphi(t=0) = \varphi_0$$

$$\varphi'(t=0) = 0$$

← Anfangsgeschwindigkeit

→ Mathematisches Modell



$$F_T = -m \cdot g \cdot \sin(\varphi)$$

(wirbende Kraft)

## Modellfehler

- keine Reibung
- Faden nicht starr
- Masse des Fadens

## Datenerfassung

$$l = 0,6 \text{ m}$$

$$g = 9,8066 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Datenfehler  $\cong$  Messfehler der Parameter

## Numerische Lösung

Umschreiben auf System 1. Ordnung

$$\text{Setze: } y_1(t) = \varphi(t) \Rightarrow y_1'(t) = \varphi'(t) = y_2(t)$$

$$y_2(t) = \varphi'(t) \Rightarrow y_2'(t) = \varphi''(t) = -\frac{g}{l} \sin(\varphi(t))$$

$\underbrace{\varphi(t)}_{y_1(t)}$

System:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ -\frac{g}{l} \cdot \sin(y_1(t)) \end{bmatrix}$$

Taylor-Formel:

$$f(t + \Delta t) = f(t) + f'(t) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} f''(\tau) \cdot (\Delta t)^2$$

↑  
mit  $\tau \in [t, t + \Delta t]$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}}_{\text{Vorwärts-differenz}} = f'(t) + \underbrace{\frac{1}{2} f''(\tau) \cdot \Delta t}_{\text{Verfahrenfehler}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{y_1(t + \Delta t) - y_1(t)}{\Delta t} \\ \frac{y_2(t + \Delta t) - y_2(t)}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ -\frac{g}{l} \sin(y_1(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t + \Delta t) \\ y_2(t + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t) + \Delta t \cdot y_2(t) \\ y_2(t) - \Delta t \cdot \frac{g}{l} \cdot \sin(y_1(t)) \end{bmatrix}$$

neu alt

Startwert: aus Anfangs-Bed.

$$y_1(t=0) = \varphi(t=0) = \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$y_2(t=0) = \varphi'(t=0) = 0$$