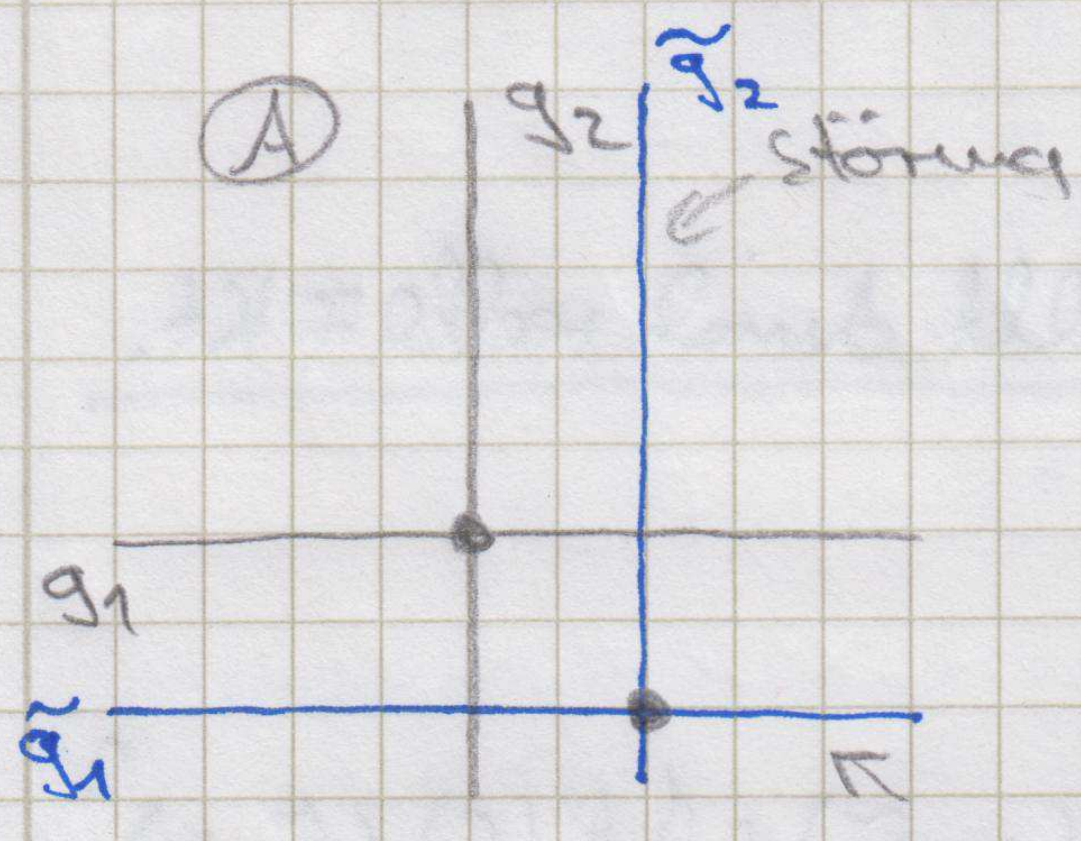
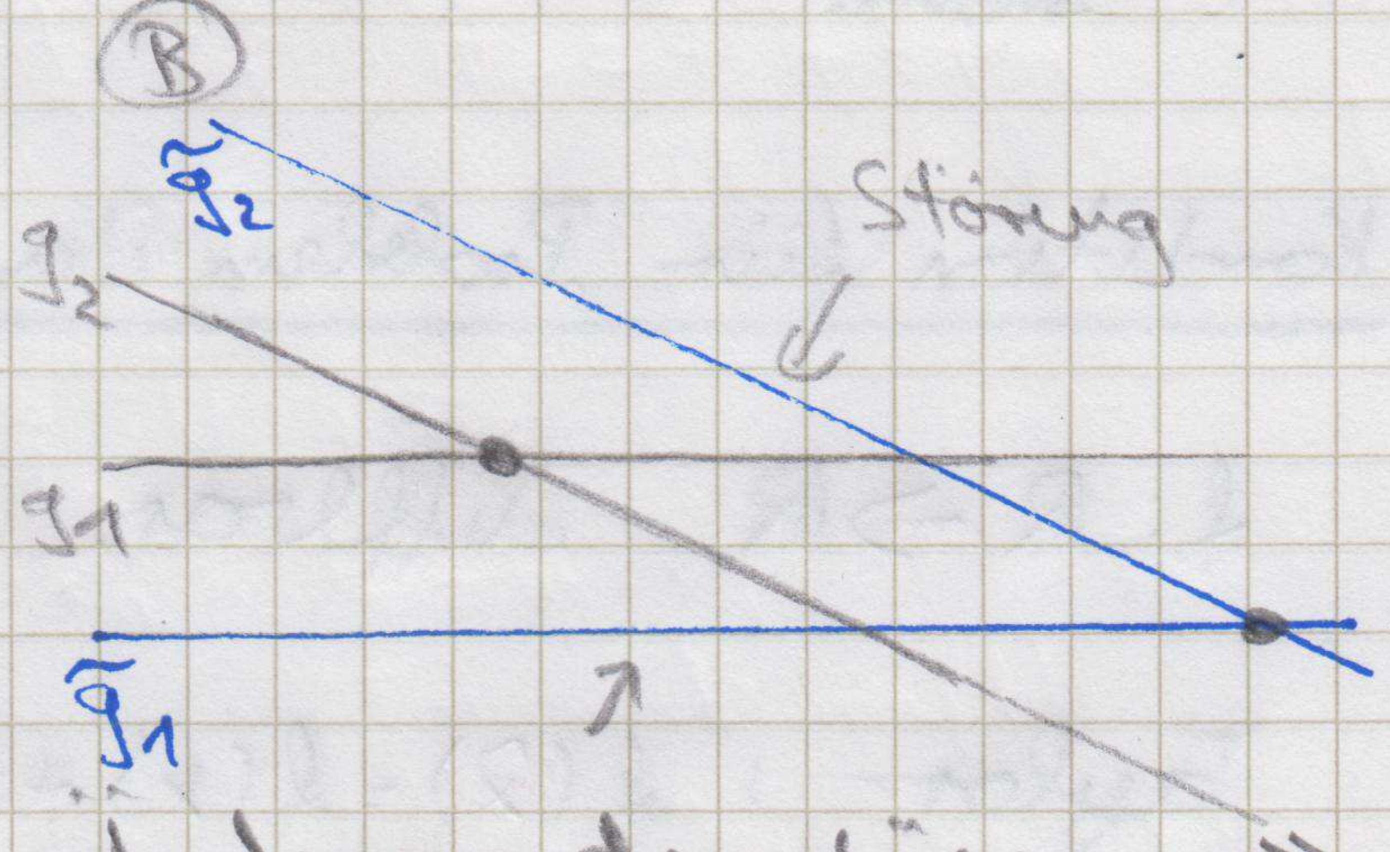
28.03.2012 **Kondition eines Problems** (16)

Messe: Wie wirken sich Störungen der Daten auf die Lösung aus → z. B. Problem bestimmen

a) Schnittpunkt zweier Geraden





Änderung der Lösung ≈ Größe der Störung.
⇒ Gut konditioniert

Änderung der Lösung ≫ Größe der Störung
⇒ Schlecht konditioniert

b) LGS: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\varepsilon \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4-\varepsilon \end{pmatrix}$$

mit $\varepsilon > 0$, aber klein.

Lösung: $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Störung: $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 4+\varepsilon \\ 4-2\varepsilon \end{pmatrix}$

Lösung: $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon \\ 3 \end{pmatrix}$

$b - \tilde{b} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$, $\|b - \tilde{b}\|_\infty = \varepsilon$

$x - \tilde{x} = \begin{pmatrix} 2-\varepsilon \\ -2 \end{pmatrix}$, $\|x - \tilde{x}\|_\infty = 2$ (unabh. von ε !)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|b-\tilde{b}\|_\infty}}_{\text{absolute Kondition wird unendlich groß}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2}{\varepsilon} = \infty$$

$\Rightarrow$ LGS kann beliebig "schlecht" konditioniert sein.

Kondition für Problem dargestellt durch reelle Fkt.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffbar.

Taylor: $f(\tilde{x}) = f(x) + f'(x)\cdot(x-\tilde{x}) + \underbrace{\frac{1}{2} f''(c)\cdot(\tilde{x}-x)^2}_{\cancel{O(|\tilde{x}-x|^2)}}$

$\boxed{\text{wobei } c \text{ zwischen } \tilde{x} \text{ und } x \text{ liegt}}$

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + f'(x)\cdot(\tilde{x}-x)$$

$$\Rightarrow \quad f(\tilde{x}) - f(x) \doteq f'(x)(\tilde{x}-x) \quad \Big| \cdot \frac{1}{f(x)}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{f(x)}\right| = \underbrace{\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot x\right|}_{K(f,x)} \cdot \left|\frac{(\tilde{x}-x)}{x}\right|$$

Bsp (Berechnung)

$$y = f(x) = e^{3x^2}, \quad f'(x) = 6x \cdot e^{3x^2}$$

$$K(f,x) = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot x\right| = \left|\frac{6x e^{3x^2}}{e^{3x^2}}\cdot x\right| = 6x^2$$

für $|x|$ klein: gut konditioniert

für $|x|$ groß: schlecht konditioniert

Kondition für skalare Funktionen

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (diffbar)

Taylor: $$f(\tilde{x}) = f(x) + \nabla f(x) \cdot (\tilde{x} - x) + \underbrace{\frac{1}{2} \underbrace{(\tilde{x} - x)}_{\text{Zeilenvektor}} \cdot \underbrace{H_f(c)}_{\text{Hesse-Matrix}} \cdot \underbrace{(\tilde{x} - x)}_{\text{Spaltenvektor}}}_{\cancel{O(\|\tilde{x} - x\|^2)}}$$

$\cdot$: Skalarprodukt

$$\nabla f(x) = \operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

$$\Rightarrow f(\tilde{x}) - f(x) \doteq \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot (\tilde{x}_j - x_j)$$

$$\Rightarrow \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \doteq \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \frac{x_j}{f(x)} \frac{(\tilde{x}_j - x_j)}{x_j}$$

ϕ_j Verstärkungsfaktoren

a) 1-Norm für $\mathbb{R}^n$

$$\left|\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right| \dot{\leq} \sum_{j=1}^{n} |\phi_j(x)| \cdot \left|\frac{(\tilde{x}_j - x_j)}{x_j}\right|$$

$$\dot{\leq} \underbrace{\max_{1 \leq j \leq n} \{|\phi_j(x)|\}}_{K_1(f,x)} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \left|\frac{(\tilde{x}_j - x_j)}{x_j}\right|}_{\left\|\frac{\tilde{x}_1 - x_1}{x_1}, \dots, \frac{\tilde{x}_n - x_n}{n}\right\|_1}$$

b) ∞-Norm

$$\left|\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right| \dot{\leq} \underbrace{\max_{1 \leq j \leq n} \left\{\left|\frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j}\right|\right\}}_{\left\|\frac{\tilde{x}_1 - x_1}{x_1}, \dots, \frac{\tilde{x}_n - x_n}{n}\right\|_\infty} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |\phi_j(x)|}_{K_\infty(f,x)}$$

Bsp (Kondition der Rechenoperationen)

a) Multiplikation

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1$$

Verstärkungsfaktoren

$$|\Phi_1| = \left| \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{f(x_1,x_2)} \right| = \left| x_2 \cdot \frac{x_1}{x_1 \cdot x_2} \right| = 1$$

$$|\Phi_2| = \left| \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{f(x_1,x_2)} \right| = \left| x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1 \cdot x_2} \right| = 1$$

$$K_1(f(\underbrace{x_1, x_2}_{x})) = 1 \qquad K_\infty(f(x_1,x_2)) = 1+1 = 2$$

sehr gut konditioniert

b) Addition

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 1$$

Verstärkungsfaktoren

$$|\Phi_1| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{f(x_1,x_2)} \right| = \left| 1 \cdot \frac{x_1}{x_1 + x_2} \right| = \left| \frac{x_1}{x_1 + x_2} \right|$$

$$|\Phi_2| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{f(x_1,x_2)} \right| = \left| 1 \cdot \frac{x_2}{x_1 + x_2} \right| = \left| \frac{x_2}{x_1 + x_2} \right|$$

$$K_1(f,x) = \max\left\{ \left|\frac{x_1}{x_1+x_2}\right|, \left|\frac{x_2}{x_1+x_2}\right| \right\} \quad K_\infty(f,x) = \left|\frac{x_1}{x_1+x_2}\right| + \left|\frac{x_2}{x_1+x_2}\right|$$

Explodiert falls $x_2 \approx -x_1$

$|x_1 + x_2| \ll 1 \Rightarrow K_1(f,x) \gg 1,\ K_\infty(f,x) \gg 1,$

sehr schlecht konditioniert

Auslöschung

z.B. in $\mathbb{M}(10,6,-9,9)$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 7.64352 \\
x_2 &= -7.64286 \\
\hline
& \quad 0.00066 = 6.6\underbrace{0000}_{\text{wertlose Stellen}} \cdot 10^{-4}
\end{aligned}
$$

normalisieren

Bsp (Stabilität von Algorithmen)

Problem: $y = f(x) = \underbrace{1 - \frac{1}{1+x}}$ mit $|x| \ll 1$

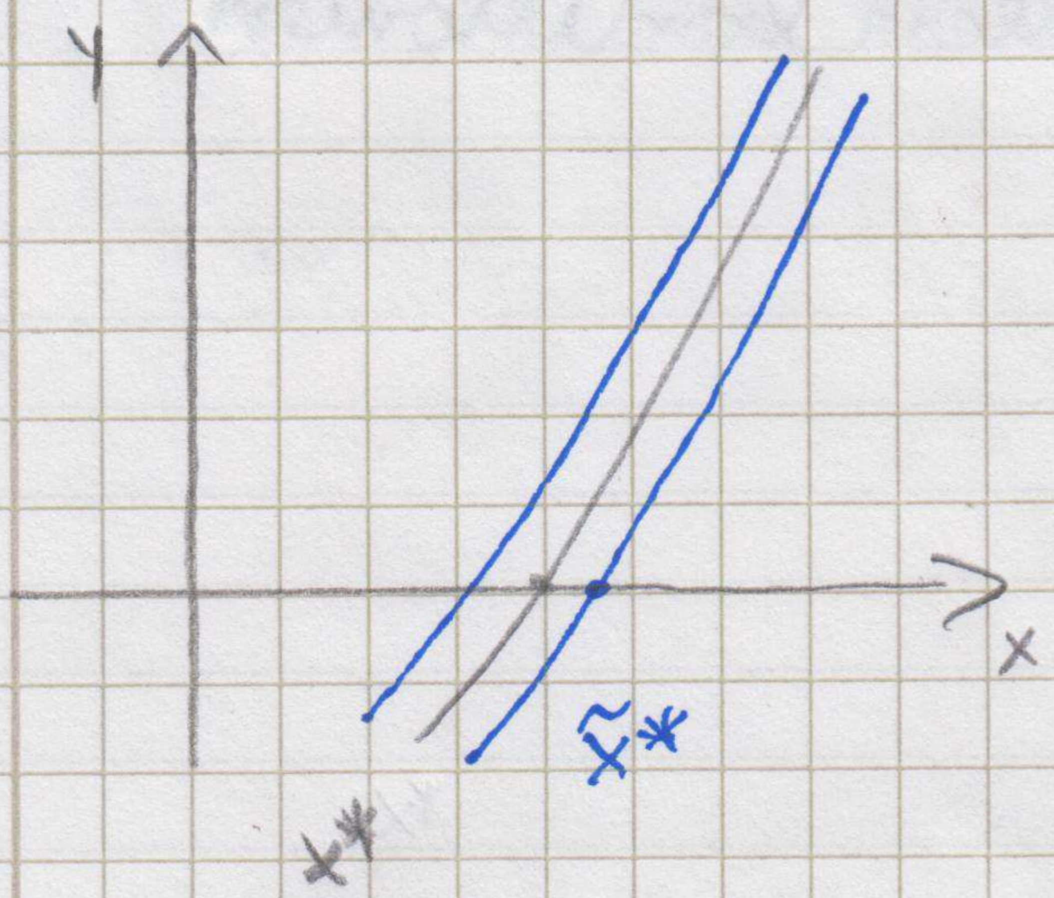
$\frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{x+1}$

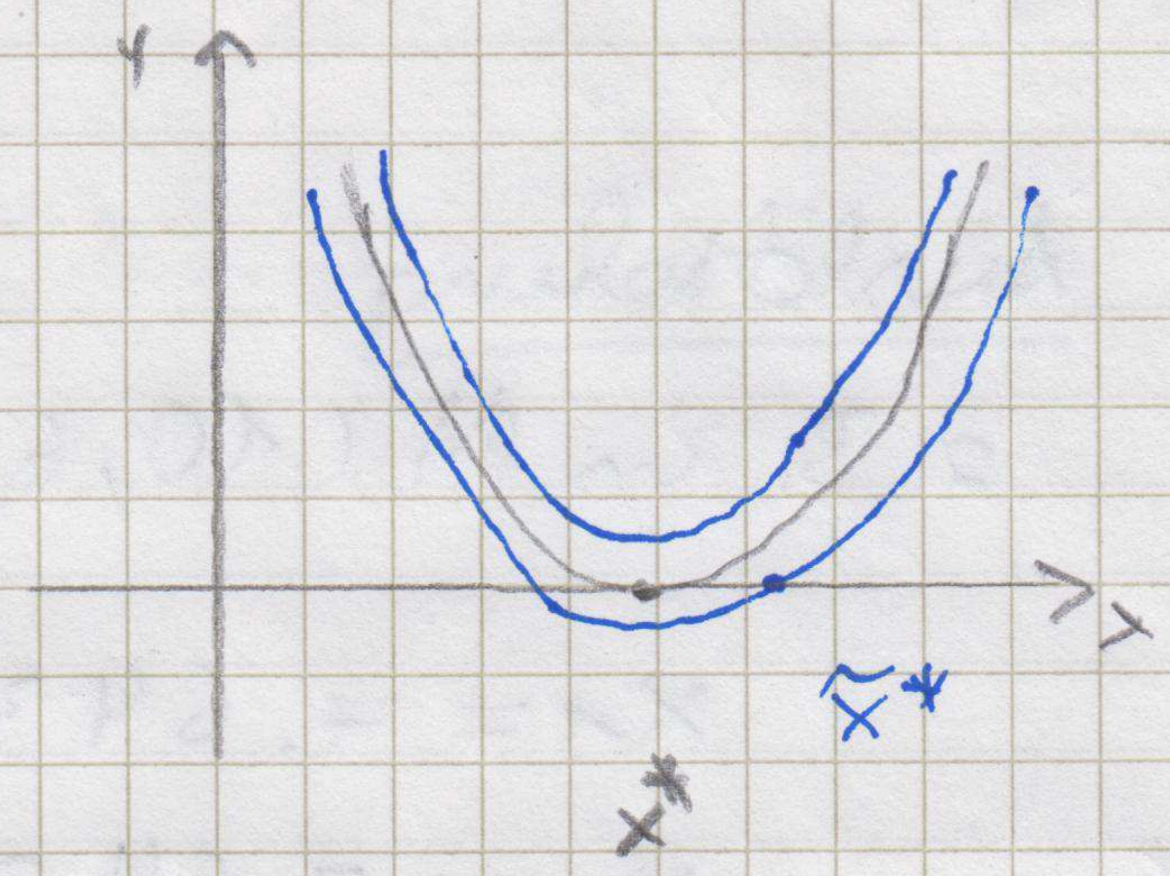
Alg: A	Alg: B
$y_1 = 1+x$	$y_1 = 1+x$
$y_2 = 1/y_1$	$y = x/y_1$
$y = 1 - y_2$	"harmlose Operationen"
Auslöschung	

Alg. B ist stabiler als Alg. A

Kondition des NST-Problems

Problem A | **Problem**





gut kond.
-> Einfache Nullstelle
-> Vielfachheit 1

schlecht kond.
-> mehrfache Nullstelle
-> Vielfachheit >1

Bisektions-Verfahren

Bestimmung der mindestens notwendigen Iteration

$$|a_n - x^*| \leq \tau \Leftarrow \text{vorgegeben}$$

$$|a_K - x^*| \leq b_K - a_K = \underbrace{\frac{b_0 - a_0}{2^K} \overset{!}{\leq} \tau}_{\text{nach } K \text{ auflösen}}$$

$$\log_2\left(\frac{b_0 - a_0}{\tau}\right) \leq K$$

Fixpunkt-Iteration

$\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig

$x^{k+1} = \Phi(x^k)$ für $k = 0, 1, \ldots$ mit Startwert x^0

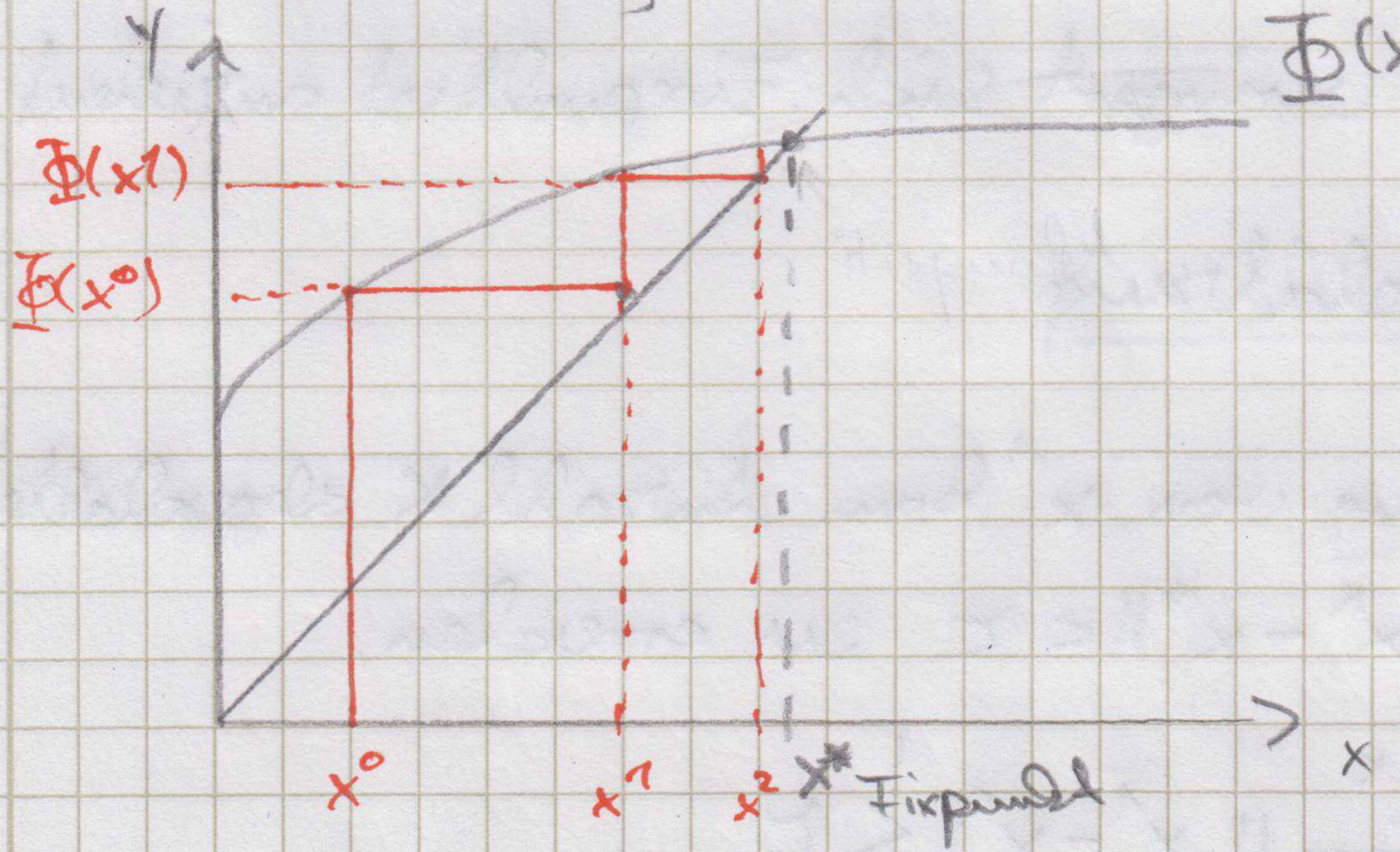
Annahme:

$\lim_{k \to \infty} x^k = x^*$

$x^* = \lim_{k \to \infty} x^{k+1} = \lim_{k \to \infty} \Phi(x^k) = \Phi(\lim_{k \to \infty} x^k) = \Phi(x^*)$

$\Rightarrow$ Fixpunkt-Gleichung: $x^* = \Phi(x^*)$

Visualisierung



Lösung von $f(x^*) = 0$ durch Umschreiben auf Fixpunkt-Gleichung $\Phi(x^*) = x^*$

z.B

$f(x) = x^2 - x - 2 = 0$

① $\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2}_{\Phi_1(x)}$

② $\Leftrightarrow x + 2 = x^2$

$\Leftrightarrow + \underbrace{\sqrt{x+2}}_{\Phi_2(x)} = x$

③ $\Leftrightarrow x + 2 = x^2$

$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x} = x$

$= 1 + \frac{2}{x} \Leftarrow \Phi_3(x)$

Konvergenz-Bed. für Fixpunkt-Iteration

a) $|\Phi'(x^*)| < 1$, wegen Stetigkeit. Es gilt: $\exists$ Umgebung $U(x^*)$

mit $|\Phi'(x)| < 1 \; \forall x \in U(x^*)$

$$|x^{k+1} - x^*| = |\Phi(x^k) - \Phi(x^*)|$$

Taylor $\quad = |\Phi'(c) \cdot (x^k - x^*)|$

(mit c zwischen x^k und x^*) $\quad = \underbrace{|\Phi'(c)|}_{<1} \cdot |x^k - x^*|$

$$|x^{k+1} - x^*| < |x^k - x^*|$$

=> Abstand verringert sich. Fixpunkt ist anziehend

a-priori-Abschätzung

Nach Bestimmung von x^1 kann Anzahl K abgeschätzt werden um $\| x^k - x^* \| < \tau$ zu erreichen.

$$\| x^k - x^* \| \leq \frac{L^k}{1-L} \| x^1 - x^0 \| \overset{!}{<} \tau$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-L)\tau} \cdot \| x^1 - x^0 \| < L^{-k}$$

$$\ln\left(\frac{1}{(1-L)\cdot\tau}\right) + \ln(\| x^1 - x^0 \|) < -k \cdot \ln(L)$$

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{(1-L)\cdot\tau}\right) + \ln(\| x^1 - x^0 \|)}{-\ln(L)} < k$$