29.3.2012 Bsp (a-priori, a-posteriori-Abschätzung)

$\Phi : [\frac{3}{2}, 3] \to [\frac{3}{2}, 3]$ mit $\Phi(x) = 1 + \frac{2}{x}$ (gestern $\Phi_3(x)$)
ist Selbstabbildung, denn $\Phi(x)$ ist monoton fallend

$\Phi(\frac{3}{2}) = 1 + \frac{2}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{4}{3} < 3$

$\Phi(3) = 1 + \frac{2}{3} > \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \forall x \in [\frac{3}{2}, 3] : \Phi(x) \in [\frac{3}{2}, 3]$

Φ ist auf $[\frac{3}{2}, 3]$ eine Kontraktion:

$\Phi(x) = \Phi(y) + \Phi'(c) \cdot (x-y)$

c zwischen x und y

$\Rightarrow |\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(c)| \cdot |(x-y)|$

$\leq \max\limits_{x \in [\frac{3}{2}, 3]} \{|\Phi'(x)|\} \cdot |x-y|$

$\Phi'(x) = \frac{-2}{x^2}$ monoton steigend

$\Rightarrow \left|\frac{-2}{x^2}\right|$ ist monoton fallend

$\Rightarrow \max\limits_{x \in [\frac{3}{2}, 3]} \{|\Phi'(x)|\} = \left|\frac{-2}{(\frac{3}{2})^2}\right| = \underbrace{\frac{8}{9}}_{=L} < 1$

$\to$ a-priori-Fehler-Abschätzung (nach dem 1. Iterationsschritt)

$|x^k - x^*| \leq \frac{L^k}{1-L} \cdot \underbrace{|\underset{2.\overline{3}}{\underset{\parallel}{x^1}} - \underset{1.5}{\underset{\parallel}{x^0}}|}_{\approx 0.\overline{83}}$

z. B. für $K=8$

$$|x^8-x^*| \leq \frac{\left(\frac{8}{9}\right)^8}{1-\frac{8}{9}} \cdot 0.83 \approx 2.91$$

→ a-posteriori Abschätzung (nach der Iteration)

$$|x^8-x^*| \leq \underbrace{\frac{\frac{8}{9}}{1-\frac{8}{9}}}_{=8} \cdot \underbrace{|x^8-x^7|}_{0.007} \approx 0.056$$

<u>Konvergenz-Geschwindigkeit der FP-Iteration</u>

$x^{k+1} = \Phi(x^k)$ und Φ ist Kontraktion:

$$|\Phi(x)-\Phi(y)| \leq \underset{<1}{L}\,|x-y|$$

setze $x = x^k$, $y = x^*$

$$\Rightarrow |\Phi(x^k)-\Phi(x^*)| \leq L\cdot|x^k-x^*|$$

↳ Lineare Konvergenz

↳ Konvergenzordnung $p=1$

<u>Bsp (Konvergenzordnung)</u>

<u>a) Lineare Konvergenz</u>

z. B. $|x^{k+1}-x^*| \leq \frac{1}{2}|x^k-x^*|$

Annahme: $|x^1-x^*| = \frac{1}{2}$

dann gilt $|x^k-x^*| \leq 2^{-k}$

$$|x^2-x^*| \leq \frac{1}{2}\underbrace{|x^1-x^*|}_{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{4} = 2^{-2}$$

k	1	10	20	30
2^{-k}	$\frac{1}{2}$	10^{-3}	$\approx 10^{-6}$	$\approx 10^{-9}$

b) Quadratische Konvergenz

$$|x^{k+1}-x^*| \le \underset{\overset{\shortparallel}{c}}{1}\cdot |x^k-x^*|^2$$

dann gilt:

$$|x^k-x^*| \le |x^{k-1}-x^*|^2 \le \left(|x^{k-2}-x^*|^2\right)^2 = |x^{k-2}-x^*|^{(2^2)}$$

$$|x^k-x^*| \le \underbrace{\underbrace{|x^1-x^*|}_{=\frac{1}{2}}{}^{(2^{k-1})}}_{\approx \tau}$$

k	1	10	20	30
τ	$\frac{1}{2}$	$7.4\cdot 10^{-155}$	0	0

Fixpunkt-Iteration höherer Konvergenz-Ordnung

$x^{k+1} = \Phi(x^k)$, $x^* = \Phi(x^*)$ und gelte zusätzlich

$\Phi'(x^*) = \Phi''(x^*) = \ldots = \Phi^{(p-1)}(x^*) = 0$ und

$\Phi^{(p)}(x^*) \neq 0$, dann hat die Fixpunkt Iteration in der Umgebung von x^* die Konvergenzordnung p

denn: (Taylor)

$$\Phi(x) = \Phi(x^*) + \underbrace{\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\overbrace{\Phi^{(j)}(x^*)}^{=0}}{j!}\cdot (x-x^*)^j}_{=0} + \frac{\Phi^{(p)}(c)}{p!}(x-x^*)^p$$

$$\Rightarrow \underbrace{|\Phi(\overset{x^k}{\overset{\shortparallel}{x}}) - \Phi(x^*)|}_{|x^{k-1}-x^*|} = \underbrace{\frac{\Phi^{(p)}(c)}{p!}}_{C} \cdot \underbrace{|x^k-x^*|^p}_{|x^k-x^*|^p}$$

Fixpunkt-Iteration mit Konvergenzordnung $p=2$

gesucht x^* mit $f(x^*)=0$

Ansatz: Fixpunkt-Iteration

$$\Phi(x) = x + \underbrace{g(x)}_{\text{bel.}} \cdot f(x)$$

$$\Phi(x^*) = x^* + g(x^*) \cdot \underbrace{f(x^*)}_{=0} = x^*$$

$$\Phi'(x) = 1 + g(x) \cdot f'(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

$$0 \overset{!}{=} \Phi'(x^*) = 1 + g(x^*) \cdot f'(x^*) + g'(x^*) \cdot \underbrace{f(x^*)}_{=0}$$

$\Rightarrow -1 = g(x^*) \cdot f'(x^*)$ | Annahme $f'(x^*) \neq 0$

Insbesondere gilt dies für

$$g(x) = \frac{-1}{f'(x)}$$

Iterations-Vorschrift:

$$x^{k+1} = \Phi(x^k) = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

Newton-Verfahren hat lokal die Konvergenzordnung $p=2$

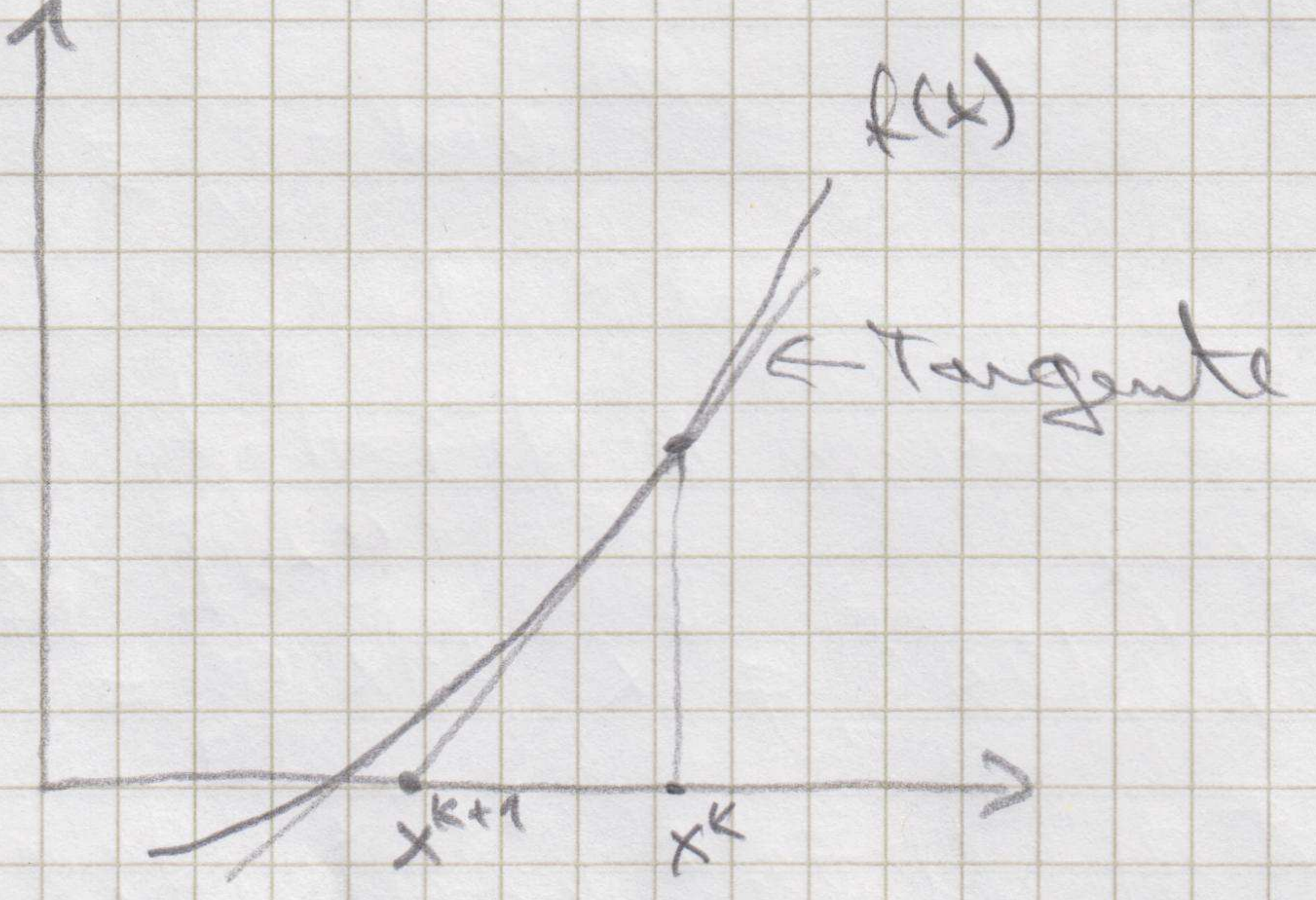
Konvergenzordnung $p=3$

Ansatz: $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \cdot g(x)$ ← unbekannt für $g(x) = \left[1 + \frac{f(x)\cdot f''(x)}{2\cdot(f'(x))^2}\right]$ quadratisches Newtonverfahren

gilt: $\Phi'(x^*) = \Phi''(x^*) = 0$

(3-Fkt-Auswertungen in jedem Schritt, in der Praxis zu teuer)

<u>geometrische Interpretation des Newton-Verfahren</u>



Linearisierung mit Tangente

$$f(x) \approx f(x^k) + f'(x^k)\cdot(x - x^k) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \underset{x^{k+1}}{\overset{\shortparallel}{x}} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

Einzugsbereich Newton-Verfahren