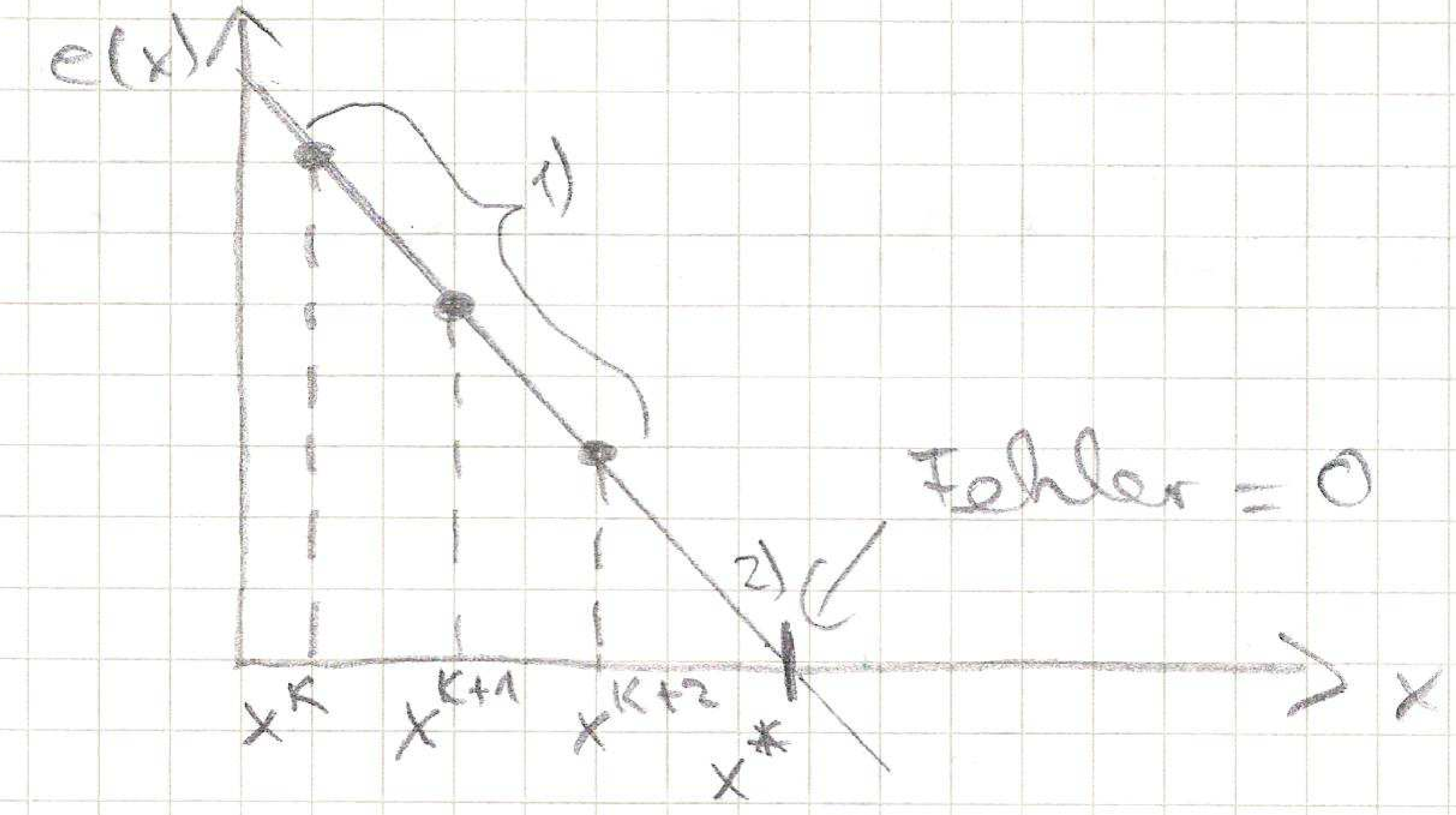
4.4.2012 **Konvergenz-Beschleunigung mit Δ^2-Methode von Aitken**

$$x^{k+1} = \phi(x^k)\,,\quad \lim_{k\to\infty} x^k = x^*$$

Annahme: Lineare Konvergenz

$$\underbrace{|x^{k+1} - x^*|}_{\text{Fehler: } e(x^{k+1})} \approx c\,\underbrace{|x^k - x^*|}_{\text{Fehler: } e(x^k)}$$



1) Interpolation des Fehlers

2) Bestimme Nullstelle durch Extrapolation

1) Ansatz:

$$\frac{x^{k+1} - x^*}{x^{k+2} - x^*} \approx \frac{x^k - x^*}{x^{k+1} - x^*}$$

2) Auflösen nach x^*

$$\Rightarrow (x^{k+1} - x^*)^2 \approx (x^k - x^*)\cdot(x^{k+2} - x^*)$$

$$\Rightarrow (x^{k+1})^2 - 2x^{k+1}\cdot x^* + \cancel{(x^*)^2} \approx x^k\cdot x^{k+2} - x^k\cdot x^* - x^{k+2}\cdot x^* + \cancel{(x^*)^2}$$

$$\Rightarrow x^*(x^k - 2x^{k+1} + x^{k+2}) \approx x^k\cdot x^{k+2} - (x^{k+1})^2$$

$$\Rightarrow x^* \approx \frac{x^k\cdot x^{k+2} - (x^{k+1})^2}{x^*(x^k - 2x^{k+1} + x^{k+2})}$$

$$\| \;\; \hat{x}^{k+1}$$

$$\Rightarrow \hat{x}^{k+1} = \frac{\left(x^k(x^{k+2}-2x^{k+1}+x^k)-(x^{k+1})^2+2x^kx^{k+1}-(x^k)^2\right)}{x^k-2x^{k+1}+x^{k+2}}$$

$$\Rightarrow \hat{x}^{k+1} = x^k - \frac{\left((x^{k+1})^2-2x^kx^{k+1}+(x^k)^2\right)}{x^k-2x^{k+1}+x^{k+2}}$$

$$\Rightarrow \hat{x}^{k+1} = x^k - \frac{(\Delta x^k)^2}{\Delta^2 x^k}$$

mit der Differenzenschreibweise

$$\Delta x^k = x^{k+1} - x^k$$

$$\Delta^2 x^k = \Delta(\Delta x^k) = \Delta(x^{k+1}-x^k)$$

$$\Rightarrow \hat{x}^{k+1} = x^{k+2} - x^{k+1} - (x^{k+1} - x^k)$$

$$= x^{k+2} - 2x^{k+1} + x^k$$

Es gilt: Folge $\hat{x}^k \to$ konvergiert quadratisch!

Schon mit 3 Werten x^k, x^{k+1}, x^{k+2} der Ausgangsfolge kann $\hat{x}^{k+1}$ berechnet werden.

<u>Steffensen-Verfahren</u>

Eingabe x^k

$y_0 = x^k$

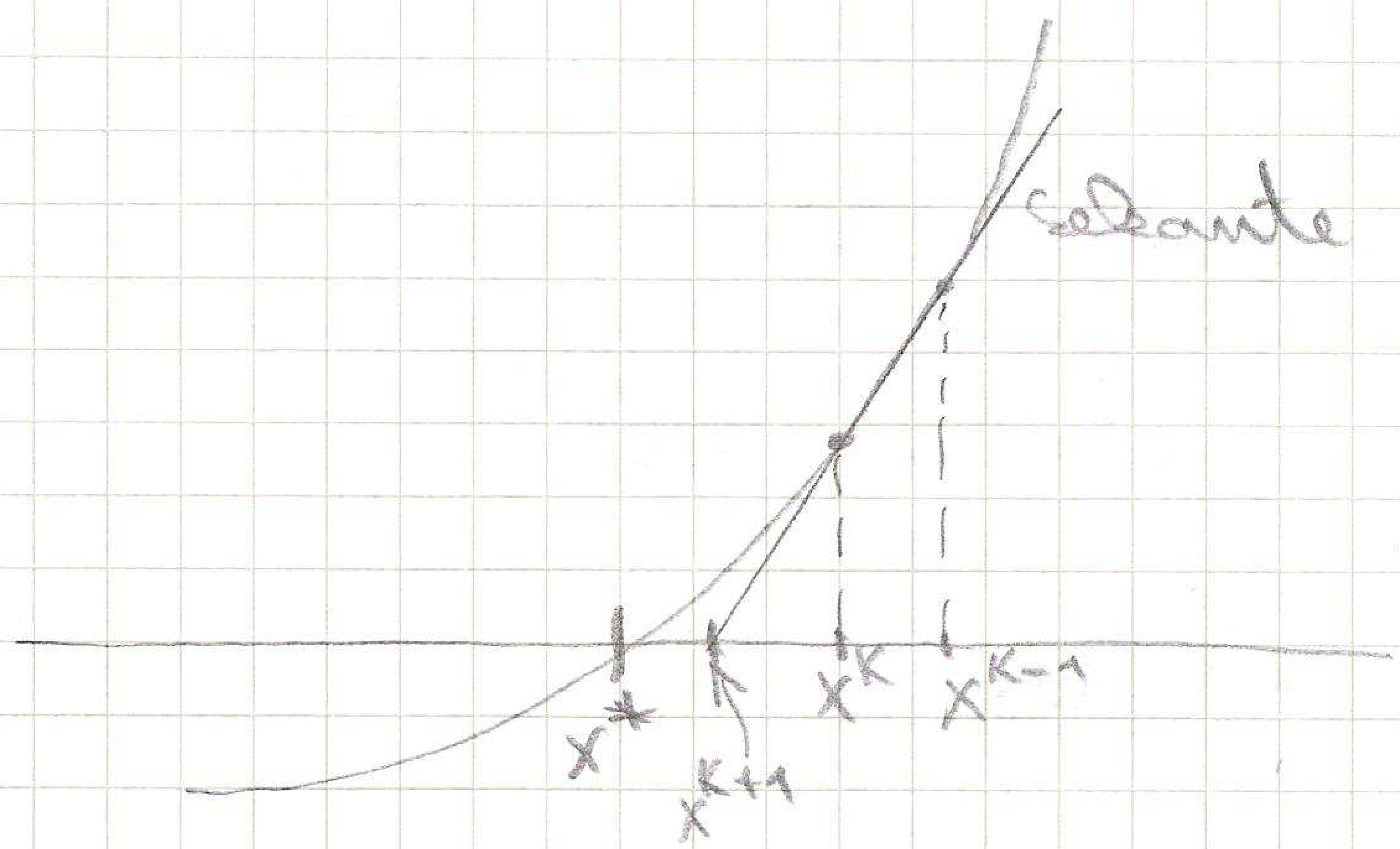
$y_1 = x^{k+1} = \Phi(x^k) = \Phi(y_0)$

$y_2 = x^{k+2} = \Phi(x^{k+1}) = \Phi(y_1)$

$$\boxed{\hat{x}^{k+1} = y_0 - \frac{(y_1-y_0)^2}{y_2-2y_1-y_0}}$$

Sekanten-Verfahren

- Ableitungsfrei
- benötigt 2 Startnäherungen

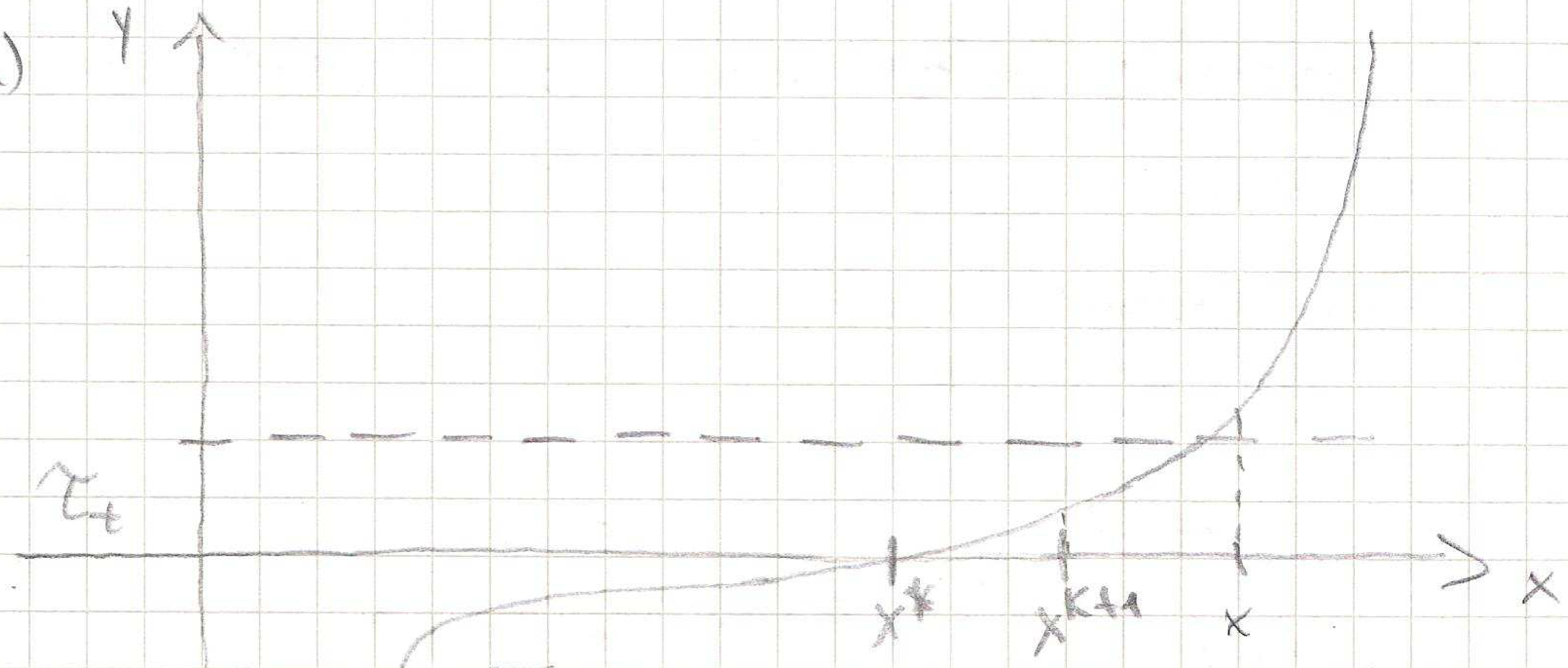


$$f(x) \approx f(x^K) + \frac{f(x^K) - f(x^{K-1})}{x^K - x^{K-1}} (x - x^K) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{x = x^K - \frac{x^K - x^{K-1}}{f(x^K) - f(x^{K-1})} \cdot f(x^K)}_{= x^{K+1}}$$

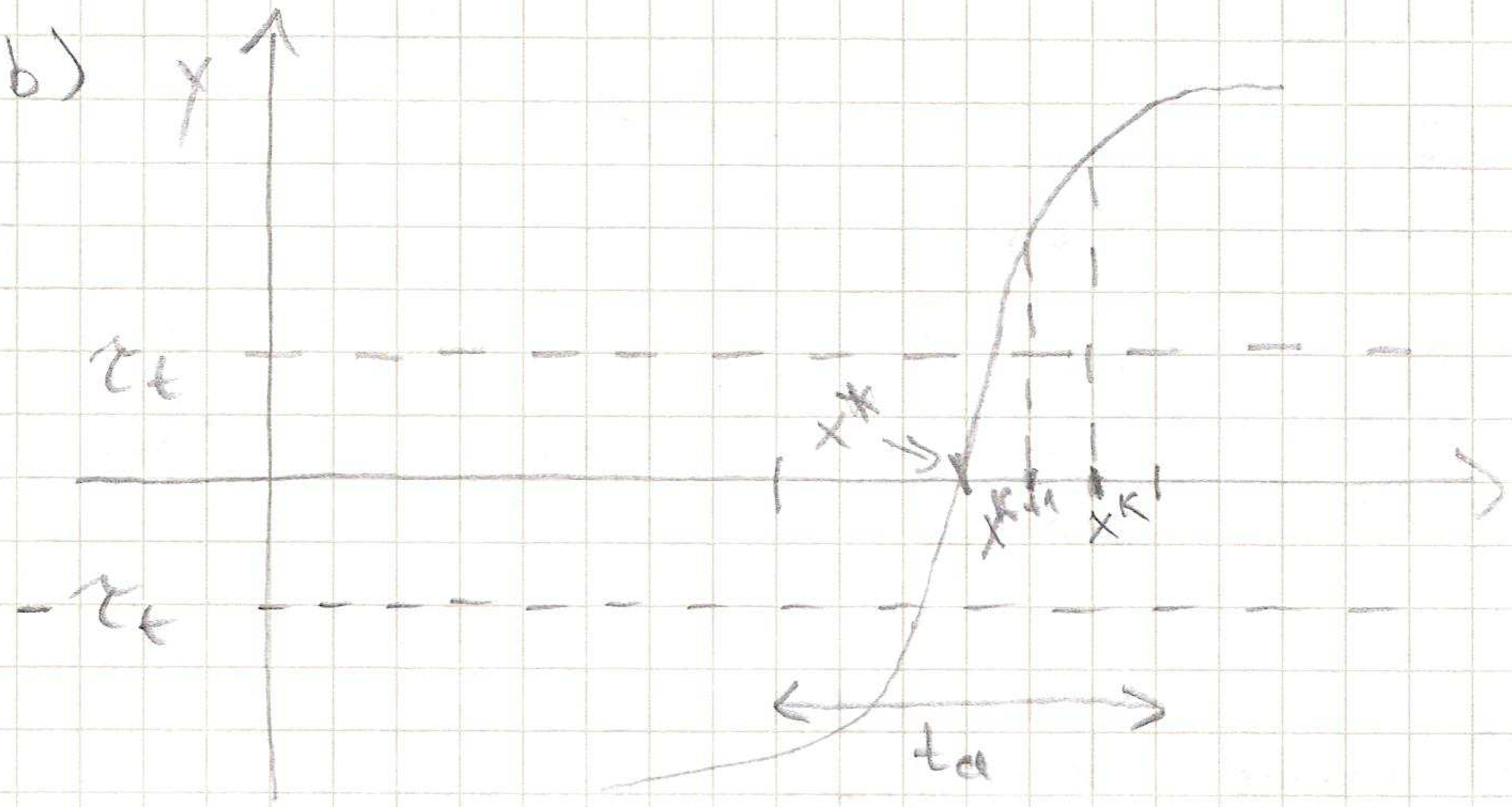
Bsp (Dilemma der Abbruch-Kriterien)

a)



Residuum-Kriterium ist erfüllt, aber Fehler-Kriterium nicht!

b)



Residuum-Kriterium ist nicht erfüllt,
aber Fehler-Kriterium ist erfüllt.

Bsp (Newton-Verfahren für Systeme)

$$f(x) = f(x_1, x_2)$$
$$= \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - 2 \\ x_1^2 + 4x_2^2 - 4 \end{pmatrix} = 0$$

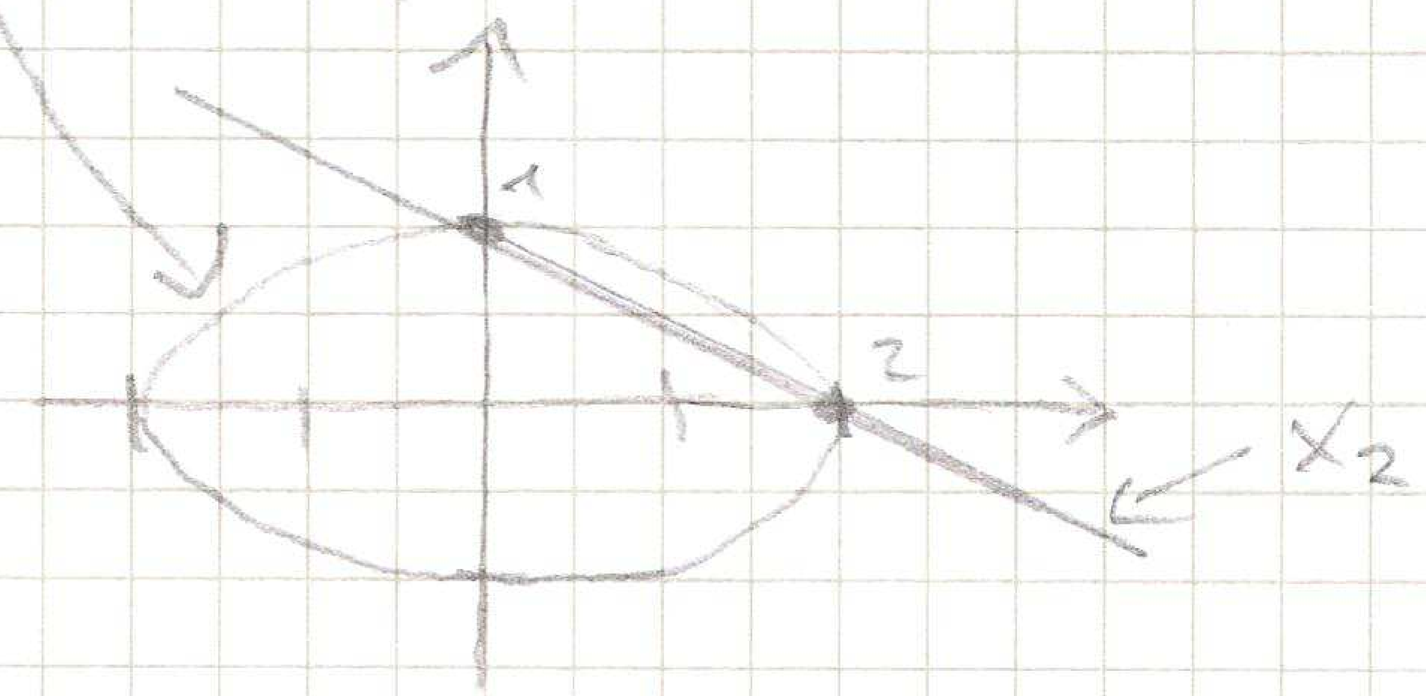
Grafische Interpretation

Lösung $\hat{=}$ Schnittpunkte der Höhenlinien zur Höhe 0.

$$f_1(x_1,x_2) = x_1 + 2x_2 - 2 = 0$$
$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}(2 - x_1)$$

$$f_2(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4 = 0$$
$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{1} = 1$$

Ellipse:



Jacobi Matrix

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2x_1 & 8x_2 \end{pmatrix}$$

Startnäherung $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$f(x^0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad f'(x^0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 16 \end{pmatrix}$$

Löse LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ s^0 \\ \\ \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix} \Rightarrow s^0 = \begin{pmatrix} -\frac{22}{12} \\ -\frac{7}{12} \end{pmatrix}$$

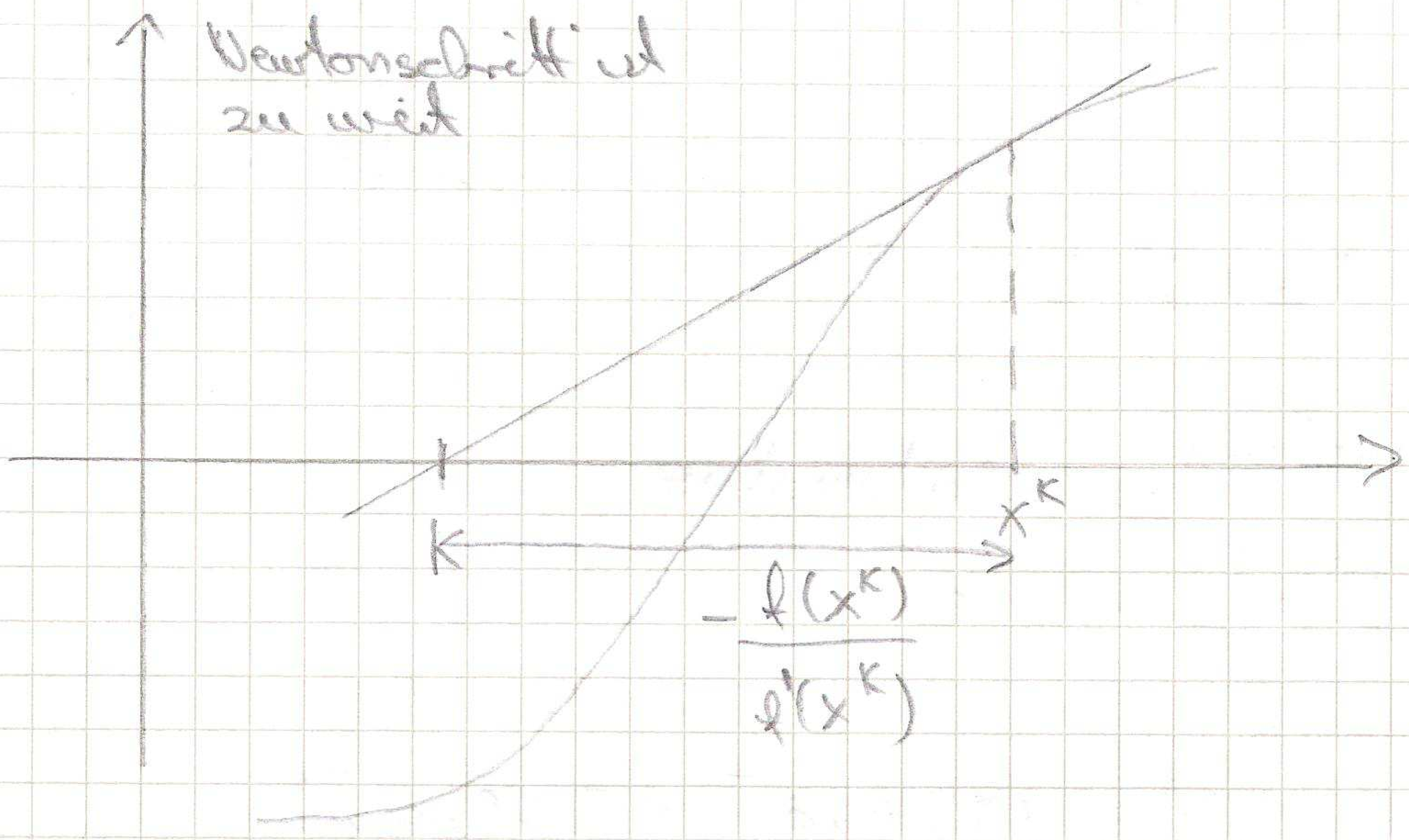
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 16 & -13 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 12 & -7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 = -\frac{36}{12} + \frac{14}{12} = -\frac{22}{12} \\ \Rightarrow x_2 = -\frac{7}{12} \end{array}$$

$$x^1 = x^0 + s^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{22}{12} \\ -\frac{7}{12} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.83 \\ 1.42 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \frac{f(a_1 + h, a_1) - f(a_1, a_2)}{h}$$

Idee, gedämpftes Newton-Verfahren



Verkleinern durch Dämpfung mit $\lambda \in (0,1)$

$$x_\lambda^{K+1} = x^K - \lambda \frac{f(x^K)}{f'(x^K)}$$

Wahl von λ:

Größter Wert, für den gilt:

$$\left(f\left(x_\lambda^{K+1}\right)\right)^2 \leq \left(f\left(x^K\right)\right)^2$$

In der Regel globale Konvergenz

Bsp (Gauss-Elimination mit Frobenius Matrizen)

Pivot-Element

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ \boxed{4} & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix} = A^{(0)}$$

Pivot-Element

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow L_1 \cdot A^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 5 \end{pmatrix} = A^{(1)}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow L_2 \cdot A^{(1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{L_2 \cdot L_1 \cdot A = R}$$

$$\Rightarrow A = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdot R$$

<u>Behauptung</u>

Einheitsmatrix

$$L_1^{-1} = I + l_1 \cdot e_1^T$$

denn

$$L_1 \cdot L_1^{-1} = (I - l_1 e_1^T) \cdot (I + l_1 e_1^T)$$

$$= I + \cancel{l_1 e_1^T} - \cancel{l_1 e_1^T} - l_1 \cdot \underbrace{e_1^T \cdot l_1}_{(1\,0\,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0} \cdot e_1^T$$

$$A = I + l_1 \cdot e_1^T) \cdot (I + l_2 \cdot e_2^T) \cdot R$$

$$= I + l_1 e_1^T + l_2 e_2^T + l_1 \underbrace{e_1^T \cdot l_2}_{(1\,0\,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0} e_2^T$$

$$= \left[I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot R$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot R$$

normierte, linksuntere Dreiecksmatrix

$A = L \cdot R$ [LR-Zerlegung von A] $\rightarrow$ kostet viel Aufwand !

Lösung von $A \cdot x = b$

$\Longleftrightarrow L \cdot \underbrace{R \cdot x}_{y} = b$

① Löse $L \cdot y = b$ (durch Vorwärts-Einsetzen)

② Löse $R \cdot x = y$ (durch Rückwärts-Einsetzen)

! $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt keine LR-Zerlegung