11.4.12

Bsp (Auswirkung kleiner Pivot-Element)

Pivot-Element

$$A^{(0)} = A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \varepsilon \ll eps$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \cdot A^{(0)} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & \underbrace{1-\frac{1}{\varepsilon}}_{= -\frac{1}{\varepsilon}} \end{pmatrix} = R$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{aber} \quad L \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq A$$

Mit Spalten-Pivotsuche:

① Vertausche Zeile Zeile 1 und 2.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P_1:\ \text{Permutationsmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix} ;\ L_1 \cdot P_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\varepsilon \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R}$$

Gleitpunkt-Arithmetik

Zerlegung:

$$P_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1+\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

ist OK.

Zum Bsp (Gauss-Elimination mit Spaltenpivotelement)

$$L_3 \cdot P_3 \cdot L_2 \cdot \underbrace{P_2 \cdot L_1}_{} \cdot P_1 \cdot A = R$$

$$\underbrace{(P_2 \cdot L_1 \cdot P_2)}_{\hat{L}_1} P_2$$

$\hat{L}_1 \leftarrow$ Frobeniusmatrix

$$\underbrace{P_3 \cdot L_2 \cdot P_3}_{\hat{L}_2} \cdot P_3$$

$$P_3 \cdot \hat{L}_1 = \underbrace{P_3 \cdot \hat{L}_1 \cdot P_3}_{\hat{\hat{L}}_1} \cdot P_3$$

$$\Rightarrow L_3 \cdot \hat{L}_2 \cdot \hat{\hat{L}}_1 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot A = R$$

$$\Rightarrow \underbrace{P_3 \cdot P_2 \cdot P_1}_{P} \cdot A = \underbrace{\hat{\hat{L}}_1^{-1} \cdot \hat{L}_2^{-1} \cdot L_3^{-1}}_{L} \cdot R$$

Linke untere normierte Δ-Matrix

Bsp (Cholesky-Zerlegung)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{!}{=}$$

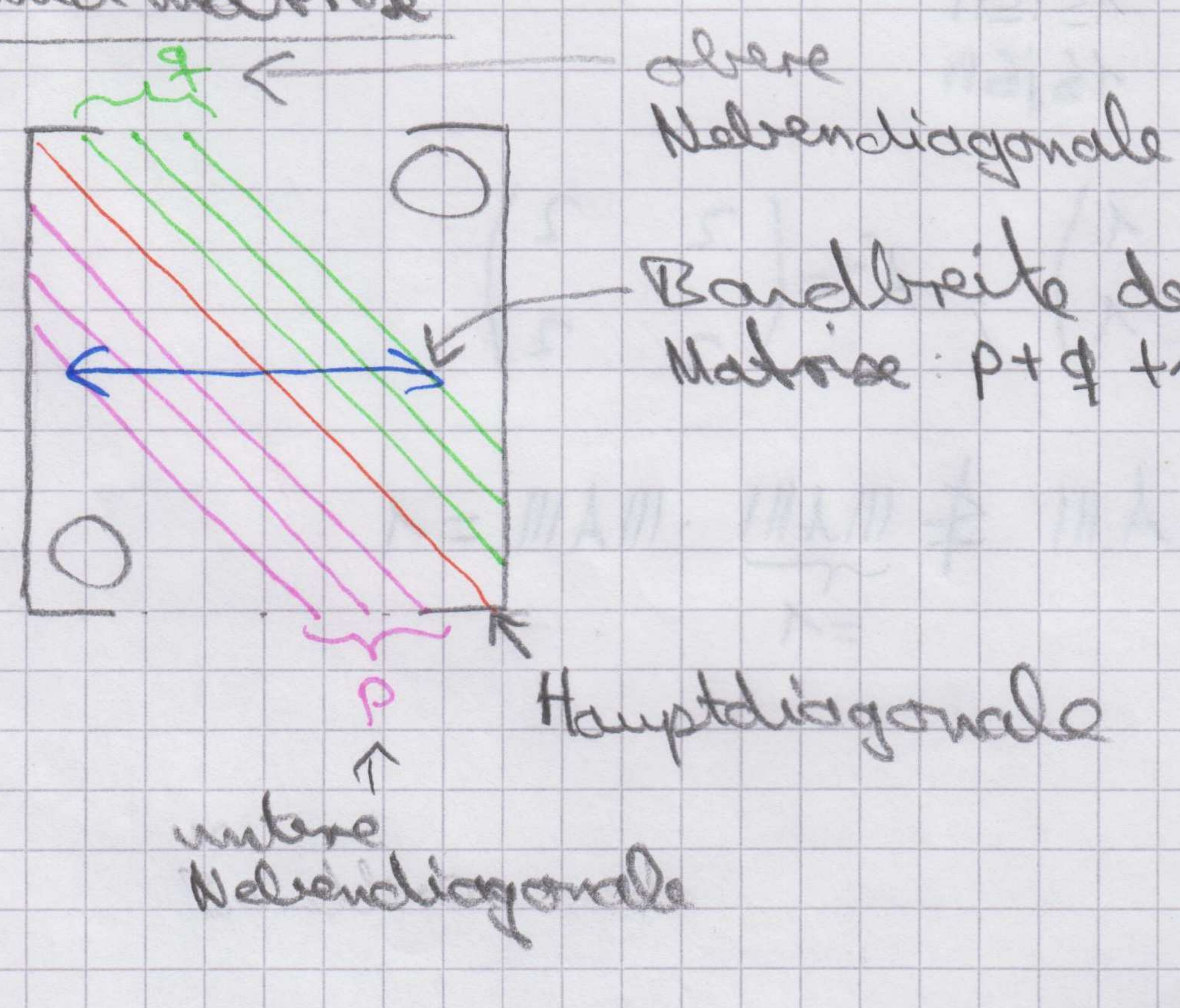
$$\overset{!}{=} \begin{array}{ccc} ① & ② & ③ \\ \left(\begin{matrix} \boxed{l_{11}} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{matrix}\right. & & \left.\right) \end{array} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= l_{11}^2 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{1} = 1 \\ -1 &= l_{21} \cdot l_{11} \Rightarrow l_{21} = -1 \\ 0 &= l_{31} \cdot \underbrace{l_{11}}_{=1} \Rightarrow l_{31} = 0 \end{aligned}\right\} \text{① Spalte}$$

$$\left.\begin{aligned} 2 &= \underbrace{l_{21}^2}_{=1} + l_{22}^2 \Rightarrow l_{22} = 1 \\ &\quad \vdots \end{aligned}\right\} \text{② Spalte}$$

usw.

Bandmatrix



Bsp (Matrix-Normen)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Spalten-Summen-Norm:

$$\|A\|_S = \max\{3, 5\} = 5$$

b) Zeilen-Summen-Norm

$$\|A\|_Z = \max\{4, 4\} = 4$$

c) Frobenius-Norm:

$$\|A\|_F = ((-1)^2 + (3)^2 + (2)^2 + (-2)^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{18}$$

d) Gesamt-Norm (für quadratische)

$$\|A\|_G = 2 \cdot \max\{1, 3, 2, 2\} = 2 \cdot 3 = 6$$

Bsp (Sub-multiplikativ)

@ Home a) und b) sind submultiplikativ (am Bsp)

NICHT submultiplikativ ist die Norm:

$$|||A||| = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \{|a_{ij}|\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2 = |||A \cdot A||| \nleq \underbrace{|||A|||}_{=1} \cdot |||A||| = 1$$

Abschätzung Störung der rechten Seite

$- \quad (Ax = b)$

$A(x + \Delta x) = b + \Delta b \leftarrow$ Störung

$$A \cdot \Delta x = \Delta b$$

$$\Rightarrow \Delta x = A^{-1} \cdot \Delta b$$

$$\Rightarrow \|\Delta x\| = \|A^{-1} \cdot \Delta b\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| \quad (1)$$

$$\|b\| = \|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \|A\| \frac{1}{\|b\|} \quad (2)$$

(1) und (2)

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|}{\|x\|}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \underbrace{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}}_{\substack{\text{relativer} \\ \text{Fehler}}} \leq \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{\substack{K_{\|\|}(A) \\ \text{Kondition} \\ \text{von } A}} \cdot \underbrace{\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}}_{\substack{\text{relative} \\ \text{Störung}}}$$

Es gilt immer:

$K_{\|\|}(A) \geq 1$

denn $\|I\| = 1 = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{K_{\|\|}(A)}$

Einheitsmatrix $\uparrow$

Bsp (Hilbert-Matrix)

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \cdots & & \\ \frac{1}{4} & \cdots & & \end{pmatrix} \quad \left(h_{ij} = \frac{1}{(i+j-1)} \right)$$

$\mathcal{K}_{\|\,\|_2}(H_4) = 15 \cdot 10^4$ (sehr schlecht Kondition)

Fehlerabschätzung mit Residuum

$$\|b\| = \|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \frac{1}{\|b\|} \quad (**)$$

Näherungslösung

$$b - A \cdot \hat{x} = r \quad \text{(Residuum)}$$

$$- \;(\; b - A \cdot x = 0 \;)$$

$$A(x - \hat{x}) = r \Rightarrow (x - \hat{x}) = A^{-1} \cdot r$$

$$\underbrace{\|x - \hat{x}\|}_{\|\hat{x} - x\|} = \|A^{-1} \cdot r\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|r\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|r\|}{\|x\|} \overset{(**)}{\leq} \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{\mathcal{K}_{\|\,\|}(A)} \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

Bsp (Skalierung)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10000 \\ 50 & -60 \end{pmatrix}$$

$$K_\infty(A) = 201.2$$

$$D_Z = \begin{pmatrix} \frac{1}{10008} & 0 \\ 0 & \frac{1}{110} \end{pmatrix}$$

$$K_\infty(D_Z \cdot A) = 3.40$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

← Zeile

CRS: 1 2 3 (Zeilenangabe)

double Feld a: [3, 1, 2, 4, 5]

int Feld colIndex: [3, 2, 4, 1, 3]

int Feld rowPointer: [1, 2, 4]

Spalte

CCS 1 2 3 4

a: [4, 1, 3, 5, 2]

rowIndex: [3, 2, 1, 3, 2]

colPointer: [1, 2, 3, 5]

Iterationsverfahren für $Ax = b$

Umschreiben auf Fixpunktgleichung:

$$\Rightarrow 0 = b - A \cdot x$$

$$\Rightarrow 0 = C(b - A \cdot x)$$

$$\Rightarrow x = x + C(b - A \cdot x) = \Phi(x)$$

Iteration

$$x^{k+1} = x^k + C(b - A \cdot x^k)$$