12.4.12

## Konvergenz der Fixpunktiteration

$$\text{Iteration:}\quad x^{k+1} = \overbrace{x^k + C(b - A\cdot x^k)}^{\Phi(x^k)}$$

$$-\left(x^* = x^* + C(b - A\, x^*)\right) \qquad \Phi(x^*) = x^*$$

$$\underbrace{(x^{k+1} - x^*)}_{\substack{e^{k+1}\\ \text{Fehler}}} = (x^k - x^*) - C\cdot A(x^k - x^*)$$

$$= \underbrace{(I - C\cdot A)}_{\substack{M\\ \text{Iterationsmatrix}}}\cdot\underbrace{(x^k - x^*)}_{e^k}$$

hieraus folgt:

$$e^k = M\cdot e^{k-1} = M\cdot M\cdot e^{k-2}$$

$$= \ldots = M^k\cdot e^0$$

Startfehler

Iteration konvergiert $\Leftrightarrow$ Spektralradius

$$\rho(M) < 1$$

$$\max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } M\}$$

$M\cdot v = \lambda\cdot v$ — $v$: EV, $\lambda$: EW

Denn (unter unter der Annahme es) "$\Leftarrow$" existiert Basis aus EV von M.

$$e^0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$$ ← Eigenvektor

$$\Rightarrow e^K = M^K \cdot e^0 = M^K \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j M^K \cdot v_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^K v_j$$

$$\Rightarrow 0 \leq \| e^K \| = \| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^K v_j \|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|\lambda_j|^K}_{\leq \rho(M)^K} \cdot \| \alpha_j \cdot v_j \|$$

$$\leq \underbrace{\rho(M)^K}_{\xrightarrow[K \to \infty]{} 0} \cdot \sum_{j=1}^{n} \| \alpha_j v_j \|$$

wenn $\rho(M) < 1$

$$\Rightarrow \lim_{K \to \infty} \| e^K \| = 0$$

$$\Rightarrow \| \lim_{K \to \infty} e^K \| = 0$$

Norm ist stetig

$$\|v\| = 0 \iff v = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{K \to \infty} e^K = 0$$ ← Null-Vektor

Es gilt immer:

(*) $|\lambda| \leq \|M\|$ für jeden EW $\lambda$ von $M$

denn: sei $M \cdot v = \lambda \cdot v$, o.B.d.A $\|v\| = 1$

$$|\lambda| \cdot \underbrace{\|v\|}_{=1} = \|\lambda \cdot v\| = \|M \cdot v\| \leq \|M\| \cdot \underbrace{\|v\|}_{=1}$$

aus (*) folgt $\boxed{\rho(M) \leq \|M\|}$

$$e^0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$$ ← Eigenvektor

$$\Rightarrow e^k = M^k \cdot e^0 = M^k \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j M^k \cdot v_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k v_j$$

$$\Rightarrow 0 \leq \| e^k \| = \| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k v_j \|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|\lambda_j|^k}_{\leq \rho(M)^k} \cdot \| \alpha_j \cdot v_j \|$$

$$\leq \underbrace{\rho(M)^k}_{\xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \text{ wenn } \rho(M) < 1} \cdot \sum_{j=1}^{n} \| \alpha_j v_j \|$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} \| e^k \| = 0$$

$$\Rightarrow \| \lim_{k \to \infty} e^k \| = 0$$

Norm ist stetig

$$\|v\| = 0 \iff v = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} e^k = 0$$ ← Null-Vektor

Es gilt immer:

(*) $|\lambda| \leq \|M\|$ für jeden EW $\lambda$ von $M$

denn: sei $M \cdot v = \lambda \cdot v$, o.B.d.A. $\|v\| = 1$

$$|\lambda| \cdot \underbrace{\|v\|}_{=1} = \|\lambda \cdot v\| = \|M \cdot v\| \leq \|M\| \cdot \underbrace{\|v\|}_{=1}$$

aus (*) folgt $\boxed{\rho(M) \leq \|M\|}$

Wahl von C

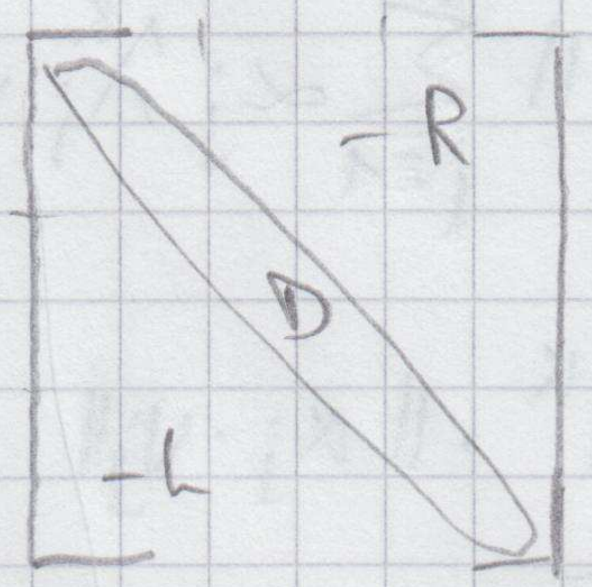
$$\rho(M) = \rho(I - C \cdot A) \leq \| I - C \cdot A \| < 1$$

optimal $C = A^{-1}$, aber zu teuer

Ziel: C gute Approximation von $A^{-1}$

Zerlegung von A:

$$A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Diagonal Matrix}}}{D} - L - R$$



1) Jacobi-Verfahren:

$$C = D^{-1}$$

Iterations-Matrix:

$$\begin{aligned} M_{jac} &= I - D^{-1} A \\ &= I - D^{-1}(D - L - R) \\ &= D^{-1}(L + R) \end{aligned}$$

Iterations-Vorschrift

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + D^{-1}(b - A \cdot x^k) \\ &= x^k + D^{-1} \cdot b - D^{-1}(D - L - R) \cdot x^k \\ &= D^{-1}(b + (L + R) \cdot x^k) \end{aligned}$$

Komponentenweise

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} \cdot x_j^k \right)$$

Konvergenz

$$\rho(M_{jac}) \leq \| M_{jac} \| = \| D^{-1}(L + R) \| \overset{!}{<} 1$$

Maximum-Norm $\hat{=}$ Zeilen-Summen-Norm

$$\| D^{-1}(L+R)\|_\infty < 1 \iff \max_{1\le i\le n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$$

Striktes Zeilen Summen-Kriterium

1-Norm $\hat{=}$ Spaltensummen-Norm

$$\| D^{-1}(L+R)\|_1 < 1$$

$$\max_{1\le j\le n} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|} < 1$$ Starkes Spaltensummen-Kriterium

Bsp

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -4 & -2 \\ -4 & 10 & -4 \\ -6 & -2 & 12 \end{pmatrix}$$

Untersuche Konvergenz von Jacobi

$$M_{jac} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & & \\ & \frac{1}{10} & \\ & & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{4}{10} & 0 & \frac{4}{10} \\ \frac{6}{12} & \frac{2}{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|M_{jac}\|_\infty = \max\left\{\frac{4}{10}+\frac{2}{10}, \frac{4}{10}+\frac{4}{10}, \frac{6}{12}+\frac{2}{12}\right\} = \frac{8}{10} = 0.8 < 1$$

$\Rightarrow$ Jacobi konvergiert

$$\|M_{jac}\|_1 = \max\left\{\frac{4}{10}+\frac{6}{12}, \frac{4}{10}+\frac{2}{12}, \frac{2}{10}+\frac{4}{10}\right\} = \frac{9}{10} = 0.9 < 1$$

## Gauss-Seidel-Verfahren

$$C = (D-L)^{-1}$$

Iterations-Matrix

$$M_{gs} = I - (D-L)^{-1} \cdot A = I - (D-L)^{-1} \cdot ((D-L)-R)$$
$$= (D-L)^{-1} \cdot R$$

Iterationsvorschrift:

$$x^{k+1} = x^k + (D-L)^{-1} (b - A \cdot x^k)$$
$$= x^k + (D-L)^{-1} (b - ((D-L)-R) \cdot x^k)$$
$$= (D-L)^{-1} \cdot (b + R x^k) = (D-L) x^{k+1} = b + R x^k$$

Komponentenweise

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij} \cdot x_j^{k+1} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^k$$

$$\Rightarrow a_{ii} \cdot x_i^{k+1} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^k - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{k+1}$$

Komponenten der neuen Lösung, welche schon bekannt sind