18.4.2012

Motivation für schwaches Zeilensummenkriterium

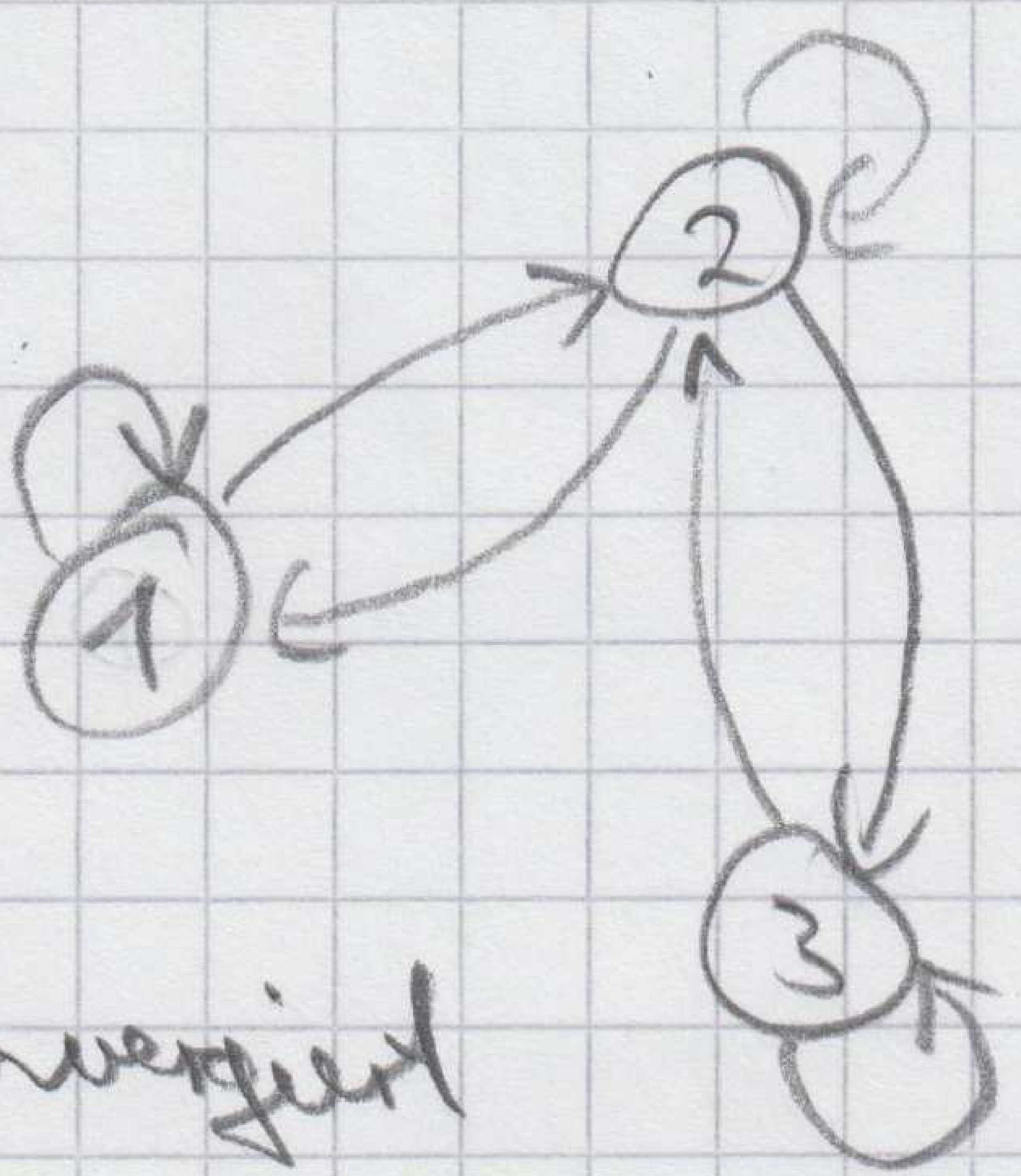
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

erfüllt starkes ZSK nicht

$$\max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = 1$$

ist aber schwach diagonal dominant.

A ist irreduzibel, denn:



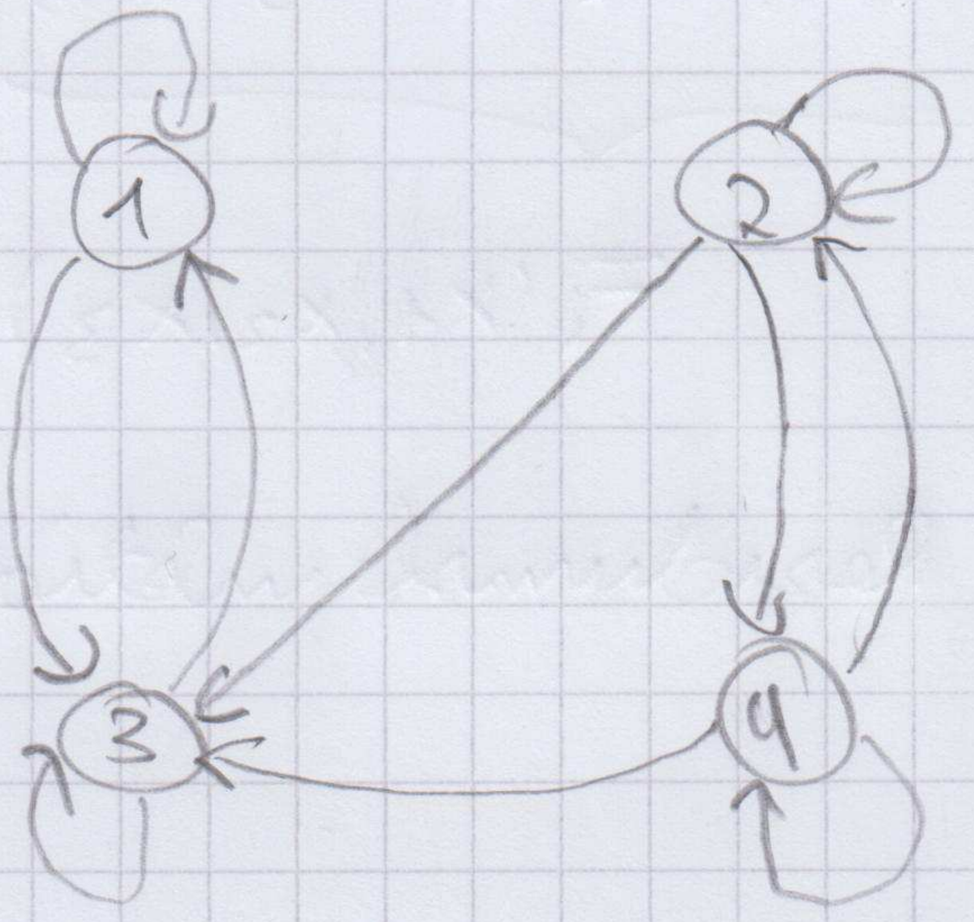
keine Schleife, wegen 0!

ist zusammenhängend

$\Rightarrow$ Jacobi konvergiert

Dagegen ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ reduzibel.

Graph von B



ist nicht zusammenhängend, denn es existiert kein gerichteter Pfad von 3 nach 2

Relaxations-Verfahren:

Einführung Relaxationsparameter ω.

- ohne Relaxation: $x_i^{(K+1)} = x_i^{(K)} + \underbrace{s_i^{(K)}}_{\text{update}}$

- mit Relaxation: $x_i^{(K+1)} = x_i^{(K)} + \omega \cdot s_i^{(K)}$

z.B. Gauss-Seidel mit Relaxation ⇒ SOR Verfahren

$$x_i^{(K+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(K+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{K} \right)$$

$$\Rightarrow x_i^{(K+1)} = x_i^{K} + \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(K+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{K} \right)$$

mit Relaxation: $x_i^{(K+1)} = x_i^{K} + \omega \cdot s_i^{K}$ ⇒ SOR-Verfahren

4. Ausgleichsrechnung

Bsp (Werte aus Abb. 4.1)

$$\min_{x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{5} \underbrace{\left(y_i - \overbrace{(x_1 + x_2 \cdot t_i + x_3 \cdot t_i^2)}^{\text{Modell } f(t_i, x_1, x_2, x_3)}\right)}_{F_i(x_1, x_2, x_3)}^2$$

i-te Komponente der Residuumsfunktion

$$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, x_3) \\ \vdots \\ F_5(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

Allgemeines Ausgleichsproblem

Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^3$, so dass $\|F(x^*)\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^2} \|F(x)\|_2^2$

<u>hier:</u> lineares Ausgleichsproblem

Parameter kommen in Modell nur linear vor.

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot \varphi_1(t) + x_2 \cdot \varphi_2(t) + x_3 \cdot \varphi_3(t)$$

<u>hier:</u> $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$, $\varphi_3(t) = t^2$

Bsp. nichtlineares Modell

$$f(t, x_1, x_2) = x_1 \cdot e^{x_2 \cdot t}$$

$$F_i(x_1, x_2, x_3) = (y_i - x_1 \cdot \underbrace{\varphi_1(t)}_{a_{i1}} - x_2 \cdot \underbrace{\varphi_2(t)}_{a_{i2}} - x_3 \cdot \underbrace{\varphi_3(t)}_{a_{i3}})$$

$$= y_i - (a_{i1} \cdot a_{i2} \cdot a_{i3}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = b - A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x}$$

5×3

$$A = \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \varphi_3(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \varphi_3(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1(t_5) & \varphi_2(t_5) & \varphi_3(t_5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ & & \\ 1 & t_5 & t_5^2 \end{bmatrix}$$

Van-der-Mond-Matrix

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1.0 & 1.0 \\ 1 & -0.5 & 0.25 \\ 1 & 0.0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \\ 1 & 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.5 \\ 0.0 \\ 0.5 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$

Lineares Ausgleichsproblem:

Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^3$, sodass $\|b - Ax^*\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^3} \|b - Ax\|_2^2$

Überbestimmtes LGS.

geometrische Lösung (für beliebiges $x \in \mathbb{R}^3$ gilt):

$$A \cdot x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -1.0 \\ -0.5 \\ 0.0 \\ 0.5 \\ 1.0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.25 \\ 0 \\ 0.25 \\ 1.0 \end{pmatrix} x_3}_{}$$

lineare Kombination der Spalten

$\in S(A) \triangleq$ Spaltenraum. Raum, der durch die Spalten aufgespannt wird

Normalgleichung:

$\underbrace{A^T \cdot A}_{n \times n} \cdot x = \underbrace{A^T \cdot b}_{n}$ ist eindeutig lösbar, wenn $\operatorname{rang}(A) = n$ gilt.

denn: Dimensionsformel:

$$n = \underbrace{\text{rang}(A)}_{n} + \underbrace{\text{Kern}(A)}_{\dim \underbrace{N(A)}_{\text{Nullraum}} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}}$$

$\Rightarrow \dim N(A) = 0$

$N(A) = \{0\}$

$\boxed{N(A^T \cdot A) = N(A)} = \{0\}$ *

denn

<u>sei</u> $x \in N(A) \Rightarrow A \cdot x = 0$

$\Rightarrow A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow x \in N(A^T \cdot A)$

<u>sei nun</u> $x \in N(A^T \cdot A)$

$\Rightarrow A^T A \cdot x = 0$

$\underbrace{x^T \cdot A^T}_{(A \cdot x)^T} \cdot A \cdot x = x^T \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \|A \cdot x\|_2^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0$

$\Rightarrow x \in N(A)$

aus (*) $\Rightarrow \dim N(A^T \cdot A) = 0$

Dimensionsformel für $A^T \cdot A$:

$$n = \text{rang}(A^T \cdot A) + \underbrace{\dim N(A^T \cdot A)}_{0}$$

$\Rightarrow \text{rang}\,\underbrace{(A^T A)}_{n \times n} = n$

$\Rightarrow A^T A$ ist regulär

Für Bsp.

$$\underbrace{A^T \cdot A}_{} = \begin{pmatrix} 5.0 & 0.0 & 2.5 \\ 0.0 & 2.5 & 0.0 \\ 2.5 & 0.0 & 2.125 \end{pmatrix}, \quad A^T \cdot b = \begin{pmatrix} 4.0 \\ 1.0 \\ 3.25 \end{pmatrix}$$

ist immer symmetrisch und pos. definit

$\Rightarrow$ denn $(A^T \cdot A)^T = A^T \cdot (A^T)^T = A^T \cdot A$ (symmetrisch)

positiv definit: für beliebige $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$ gilt:

$$y^T \cdot A^T \cdot A \cdot y = (A \cdot y)^T \cdot A \cdot y = \|A \cdot y\|_2^2 > 0$$

Eigenschaften orthogonaler Matrizen

a) $(Q^T)^T \cdot Q^T = Q \cdot Q^T = I$

b) $\|Q \cdot x\|_2 = \sqrt{(Q \cdot x)^T \cdot Q \cdot x} = \sqrt{x^T \cdot Q^T \cdot Q \cdot x}$
$= \sqrt{x^T \cdot x} = \|x\|_2$

c) $K_2(Q) = 1$

$$\|Q_2\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Q \cdot x\|_2}{\|x\|_2} = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|x\|_2}{\|x\|_2} = 1$$

$$\|Q^{-1}\|_2 = \|Q^T\|_2 = 1$$

$$K_2(Q) = \|Q\|_2 \cdot \|Q^{-1}\|_2 = 1 \cdot 1 = 1$$