19.4.12 Lösung des lin. Ausgleichsproblem mit QR-Zerlegung

Bsp

t_i	1	2	3	4
y_i	2	1	1	3

Gesucht Ausgleichs-Gerade

Modell $f(t, x_1, x_2) = x_1 + t \cdot x_2 = x_1 \varphi_1(t) + x_2 \varphi_2(t)$

$= x_1 \varphi_1(t) + x_2 \cdot \varphi_2(t)$

$\varphi_1(t) = 1, \varphi_2(t) = t$

LGS

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \| b - Ax \|_2^2$$

bekannt QR-Zerlegung von A

$$\underbrace{A}_{m \times n} = \underbrace{\overset{\text{orthogonal}}{Q}}_{m \times m} \cdot \underbrace{R}_{m \times n} = Q \cdot \begin{bmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n \\ \}m-n \end{matrix}$$

$$\| b - A \cdot x \|_2^2 = \| Q^T (b - A \cdot x) \|_2^2$$

$\uparrow$ orthogonal

$$= \| Q^T (b - Q \cdot R \cdot x) \|_2^2$$

$$= \| \underbrace{Q^T \cdot b}_{\hat{b}} - \underbrace{Q^T \cdot Q}_{I} \cdot R \cdot x \|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x \right\|_2^2 *$$

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}n \\ \}m-n \end{matrix}$$

Einschub:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}n \\ \}m-n \end{matrix}$$

$$\|v\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} ({}^i v)^2 = \sum_{i=1}^{n} ({}^i v)^2 + \sum_{i=n+1}^{m} ({}^i v)^2 = \|v_1\|_2^2 + \|v_2\|_2^2$$

* mit Einschub

$$= \underbrace{\|\hat{b}_1 - \hat{R}x\|_2^2 + \|\hat{b}_2\|_2^2}\quad (*)$$

Suche $x \in \mathbb{R}$, sodass (*) minimal wird.

Erfüllt für x ist Lösung von $\hat{R}x = \hat{b}_1$

<u>Vorteil</u>

$$\mathcal{K}_2(\hat{R}) = \mathcal{K}_2(R) = \mathcal{K}_2(Q^T \cdot A) = \mathcal{K}_2(A)$$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= Q \cdot R \\ R &= Q^T \cdot A \end{aligned}}$$

Kondition wird nicht quadriert

Normal-Gleichungen

$$A^T A x = A^T b$$

$$\mathcal{K}_2(A^T A) = (\mathcal{K}_2(A))^2$$

QR-Zerlegung mit Householder Transformation

$v \in \mathbb{R}^n$ bel.

$$Q_v = I - 2 \cdot \frac{v \cdot v^T}{v^T \cdot v}$$

$v^T \cdot v = \|v\|_2^2 \in \mathbb{R}$

Eigenschaften:

$$Q_v^T = \left(I - 2 \cdot \frac{v \cdot v^T}{v^T \cdot v}\right)^T = I^T - 2 \cdot \frac{(v \cdot v^T)^T}{v^T \cdot v}$$

$$= I - 2 \cdot \frac{(v^T)^T \cdot v^T}{v^T \cdot v} = I - 2 \cdot \frac{v \cdot v^T}{v^T \cdot v}$$

$= Q_v$, wenn Q_v symmetrisch ist.

Aufteilung bezieht sich auf den Kasten Skript S. 76▷.

b) $$Q_v \cdot Q_v = \left(I - 2 \cdot \frac{v \cdot v^T}{v^T \cdot v}\right)\left(I - 2 \frac{v \cdot v^T}{v^T \cdot v}\right)$$

$$= I \cancel{- 2 \frac{v \cdot v^T}{v^T \cdot v}} \cancel{- 2 \cdot \frac{v \cdot v^T}{v^T \cdot v}} + \underbrace{\frac{4}{(v^T v)^2} v (v^T v) \cdot v^T}_{\cancel{4 \cdot \frac{v \cdot v^T}{v^T \cdot v}}}$$

$= I$

also $Q_v^T \cdot Q_v = Q_v \cdot Q_v = I$

$\Rightarrow Q_v$ ist orthogonal

c) /

d) $Q_v \cdot y = y \iff y^T \cdot v = 0$

"$\Leftarrow$" gelte $y^T \cdot v = 0$ d.h. $v^T y = 0$

$$Q_v \cdot y = \left(I - 2 \cdot \frac{v \cdot v^T}{v^T \cdot v}\right) y = y - 2 \frac{v \cdot v^T \cdot y}{v^T \cdot v} = y$$

e) $$Q_v \cdot v = \left(I - 2 \cdot \frac{v \cdot v^T}{v^T v}\right) \cdot v = v - 2 \cdot \frac{v (v^T \cdot v)}{v^T \cdot v}$$

$= v - 2v = -v$

f) geometrische Deutung: Sei y bel.

$y = \alpha \cdot v + \beta \cdot v_\perp$ ← $v_\perp^T \cdot v = 0$

$Q_v y = Q_v (\alpha \cdot v + \beta \cdot v_\perp) = \alpha \cdot Q_v \cdot v + \beta \cdot Q_v \cdot v_\perp$

$= - \alpha \cdot v + \beta \cdot v_\perp$

QR-Zerlegung

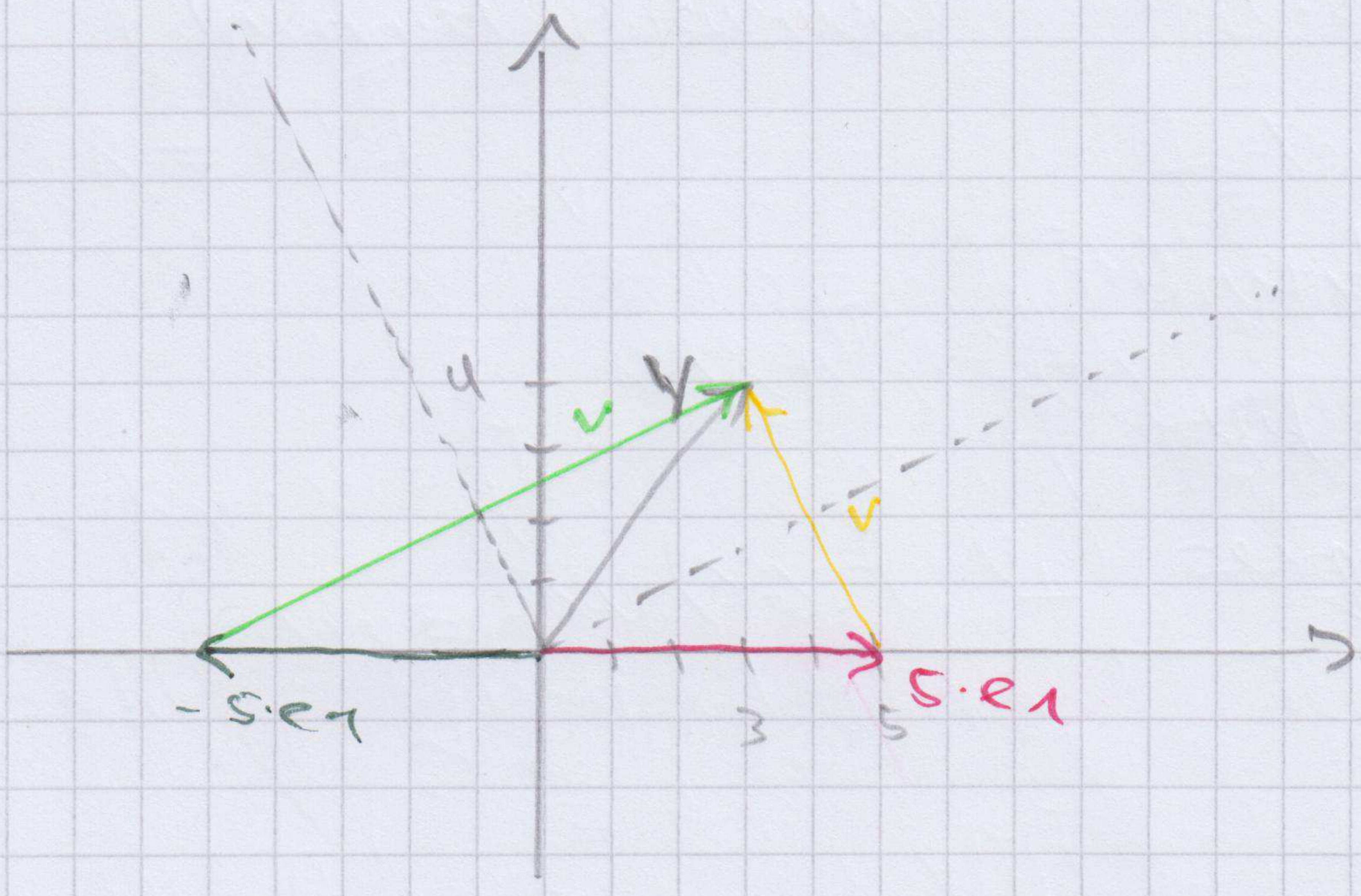
$$Q_{v_1}\begin{pmatrix} \overset{y}{a_{i1}} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{*} & \cdots \\ 0 & \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Ziel: wähle v so, dass gilt

$$Q_v \cdot y = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot e_1$$

$$\|y\|_2 = \|Q_v \cdot y\|_2 \overset{!}{=} \|\alpha \cdot e_1\|_2 = |\alpha| \cdot \underbrace{\|e_1\|_2}_{=1}$$

$$\Rightarrow |\alpha| = \|y\|_2$$



1) Möglichkeit

Spiegelung auf $\|y\|_2 \cdot e_1$

$\|y\|_2 \cdot e_1 + v = y \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = y - \|y\|_2 \cdot e_1}$

2) Möglichkeit

Spiegelung auf $-\|y\| \cdot e_1$

$-\|y\|_2 \cdot e_1 + v = y \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = y + \|y\|_2 \cdot e_1}$

Um Auslöschen zu vermeiden, wählt man

$v = y + \operatorname{sign}(y_1) \cdot \|y\|_2 \cdot e_1$

Signum Fkt:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$