25.4.2012 **Zahlen Bsp zur QR-Zerlegung**

$$\left\| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{b} \right\|_2^2$$

QR Zerlegung mit Householder-Transformation.

$$v_1 = a_{:1} + \underbrace{\mathrm{sign}(a_{11})}_{1} \cdot \underbrace{\|a_{:1}\|_2}_{\sqrt{4}=2} \cdot e_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_{v1} = I - 2 \cdot \frac{v_1 v_1^T}{v_1^T \cdot v_1} = I - \frac{2}{\underbrace{v_1^T \cdot v_1}_{9+1+1+1=12}} \cdot v_1 \cdot v_1^T$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$Q_{v1} \cdot a_{:1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{(3\,1\,1\,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=3+1+1+1=6}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -2 = \text{sign}(a_{11}) \cdot \|a_{:1}\|_2$$

$$Q_{v1} \cdot a_{:2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{(3\ 1\ 1\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{3+2+3+4=12}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Somit:

$$Q_{v1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A^{(2)}$$

$$v_2 = a_{:2} + \underbrace{\text{sign}(0)}_{=1} \cdot \underbrace{\|a_{:2}\|_2}_{\sqrt{5}} \cdot e_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v_2^T \cdot v_2 = 5 + 1 + 4 = 10$$

$$\hat{Q}_{v2} = I + \frac{1}{5} (\sqrt{5}\ 1\ 2) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{Q}_{v2} \cdot a_{:2} = \begin{pmatrix} -\text{sign}(0) \cdot \|a_{:2}\|_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$Q_{v2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \boxed{\hat{Q}_{v2}} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$$Q_{V2} \cdot Q_{V1} \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -\sqrt{5} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{R}$$

$\hat{R}$

$$\Rightarrow A = Q_{V1}^T \cdot Q_{V2}^T \cdot R = \underbrace{Q_{V1} \cdot Q_{V2}}_{Q} \cdot R$$

$$Q^T = (Q_{V1} \cdot Q_{V2})^T = Q_{V2}^T \cdot Q_{V1}^T = Q_{V2} \cdot Q_{V1}$$

$$\min \| b - A \cdot x \|_2^2 = \min \| Q^T \cdot (b - Ax) \|_2^2$$

$$= \min \| Q^T b - \underbrace{Q^T \cdot A}_{R} x \|_2^2$$

$$= \min \left\| \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ -0{,}3\sqrt{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{6} - \frac{17}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{17}{30} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -\sqrt{5} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

Löse durch Rückwärts einsetzen:

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ -0.3\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$\boxed{x_2 = 0{,}3}$ $\boxed{x_1 = 1}$

Ausgleichs-Gerade:

$$f(t, x_1, x_2) = 1 + 0.3t$$

Residuum:

$$\|b - Ax\|_2^2 = \|\hat{b}_2\|_2^2 = 2.3$$

Nichtlineares Ausgleichsproblem

<u>Bsp:</u> Modell

$$f(t, x_1, x_2) = x_1 \cdot e^{x_2 \cdot t}$$

Messwerte:

t_i	0	1	2	3
y_i	2	0.7	0.3	0.1

Residuum-Fkt:

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.7 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \cdot 1 \\ x_1 \cdot e^{x_2} \\ x_1 \cdot e^{2x_2} \\ x_1 \cdot e^{3x_2} \end{pmatrix}$$

$$\min_{x_1, x_2} \|F(x_1, x_2)\|_2^2 \iff \min_{x_1, x_2} \phi(x_1, x_2)$$

$$= \min_{x_1, x_2} \underbrace{\tfrac{1}{2} F(x_1, x_2)^T \cdot F(x_1, x_2)}_{\phi(x_1, x_2)}$$

Näherungs-Lösung

$x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$ sei bekannt

Linearisierung und Taylor:

$$F(x) = F(x^0) + F'(x^0)\cdot(x - x^0)$$

$\Uparrow$ Jacobi-Matrix

$$F'(x^0) = \begin{pmatrix} \text{— grad } F_1(x_0)^T \text{ —} \\ \text{— grad } F_2(x_0)^T \text{ —} \\ \text{— } \dots \text{ —} \\ \text{— grad } F_4(x_0)^T \text{ —} \end{pmatrix}$$

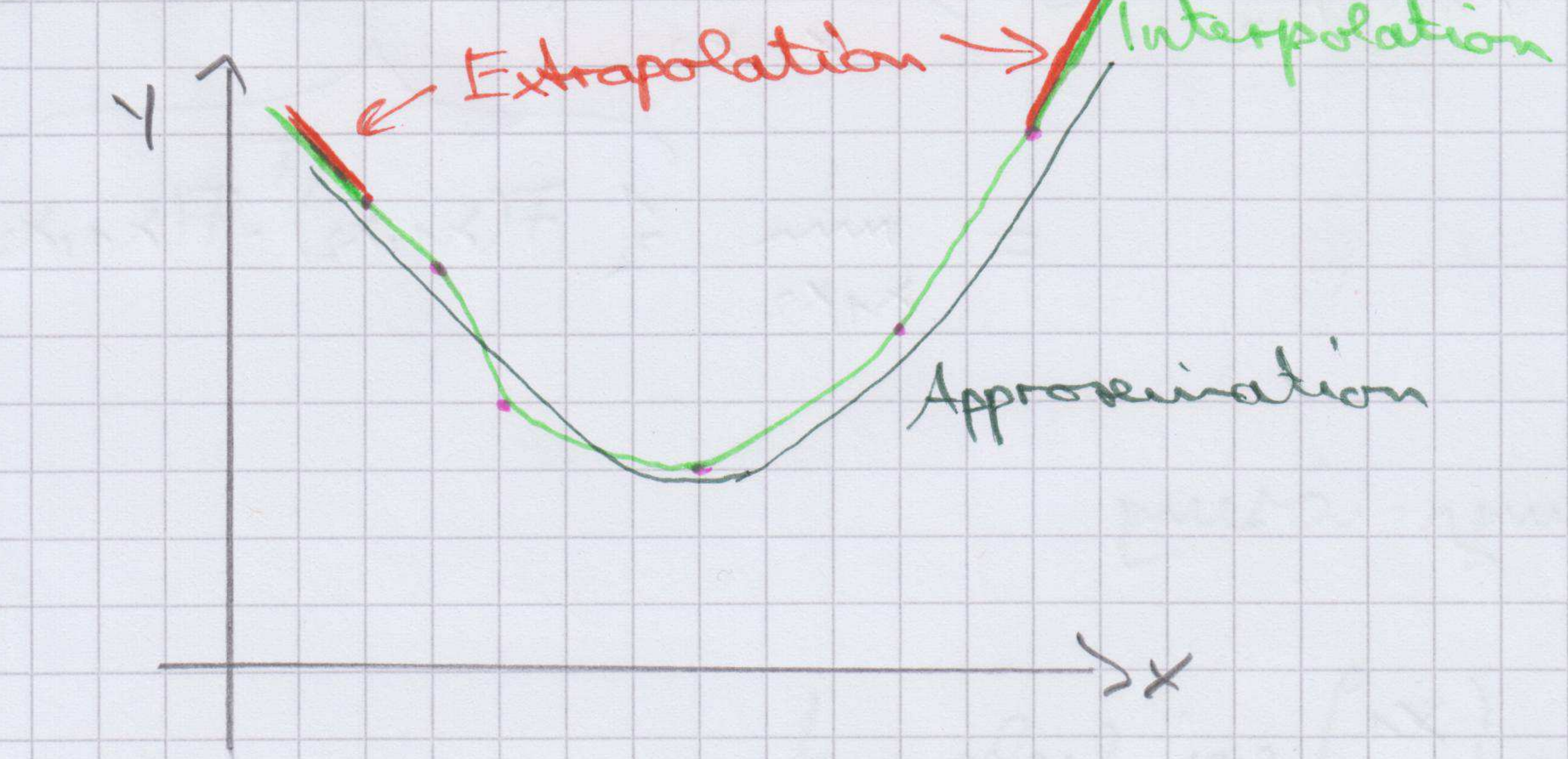
$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -e^{x_2^0} & -x_1^0 e^{x_2^0} \\ -e^{2x_2^0} & -2x_1^0 \cdot e^{2x_2^0} \\ -e^{3x_2^0} & -3x_1^0 e^{3x_2^0} \end{pmatrix}$$

$$\min_{s^0 \in \mathbb{R}^2} \| F(x^0) + F'(x^0)\cdot s \|_2^2 \rightarrow$$ Lineares Ausgleichsproblem.

Lösung z. B. durch QR:

Update: $x^1 = x^0 + s^0$

Interpolation



Monom-Basis

z.B

x_i	1	2	3
y_i	3	2	6

Ansatz: Parabel

Unbekannte

$$p^*(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Bed $p^*(x_i) = = y_i$ für $i = 0,1,2$

LGS:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1^1 & 1^2 \\ 1 & 2^1 & 2^2 \\ 1 & 3^1 & 3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- Matrix ist voll besetzt.
- Vandermonde-Matrix für kleine n schlecht konditioniert

Monom-Basis ist für Interpolation ungeeignet.

Lagrange-Basis

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}$$ hat die Eigenschaft:

$$\left.\begin{array}{l} L_0(x_0=1) = 1 \\ L_0(x_1=2) = 0 \\ L_0(x_2=3) = 0 \end{array}\right\} L_0(x_i) = \delta_{0i}$$

Kronecker Delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}$$

so dass $L_1(x_i) = \delta_{1i}$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

$$p^*(x) = a_0 \cdot L_0(x) + a_1 \cdot L_1(x) + a_2 L_2(x)$$

LGS:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- sofort lösbar, eindeutig lösbar

$$p^*(x) = 3 \cdot L_0(x) + 2 \cdot L_1(x) + 6 L_2(x)$$

→ Nachteil

- Auswertung von $p^*(x)$ an Stelle $z \neq x_i$ sehr aufwendig
- Bestimmung der $L_j(x)$ aufwendig und bei Hinzunahme von Stützwerten und Stützstellen Neuberechnung der $L_j(x)$

Newton-Basis

kleines Phi!

$\phi_0(x) = 1 \quad , \quad \phi_1(x) = (x - x_0)$

$\phi_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$

$$p^*(x) = a_0 + a_1(x - x_0^1) + a_2(x - x_0^1)(x - x_1^2)$$

$\Rightarrow$ Bed. $p^*(x_i) = y_i$ führt auf das LGS:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & (2-1) & 0 \\ 1 & (3-1) & (3-1)(3-2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- Untere Dreiecksmatrix:
  Lösung durch vorwärts Einsetzen

- Auswertung von $p^*(x)$ an der Stelle z:

$$\begin{aligned} p^*(z) &= a_0 + a_1(z - x_0) + a_2(z - x_0)(z - x_1) \\ &= a_0 + (z - x_0)\big(\underbrace{a_1 + a_2(z - x_1)}\big) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Horner-Schema-ähnlich

anderes Bsp

$$\begin{aligned} p^*(z) &= a_0 + a_1(z - x_0) + a_2(z - x_0)(z - x_1) + \\ &\quad + a_3(z - x_0)(z - x_1)(z - x_2) \\ &= \underbrace{a_0 + (z - x_0)\big(\underbrace{a_1 + (z - x_1)\big(\underbrace{a_2 + (z - x_2)\cdot a_3}_{1\ b_2}\big)}_{2}\big)}_{3} \end{aligned}$$

$b_3 = a_3$ für $K = 3$ bis 1

$$\boxed{b_{K-1} = a_{K-1} + (z - x_{K-1}) \cdot b_K}$$

$p^*(z) = b_0$

Bsp: Berechnung des Newton-Interpol.-Polynoms mit dividierten Differenzen

$\Rightarrow$ Differenzen-Schema:

$x_0 = 1$	$\overbrace{f[x_0] = 3}^{a_0}$		
		$\overbrace{f[x_0,x_1] = \frac{2-3}{2-1} = -1}^{a_1}$	
$x_1 = 2$	$f[x_1] = 2$		$\overbrace{f[x_0,x_1,x_2] = \frac{4-(-1)}{3-1} = \frac{5}{2}}^{a_2}$
		$f[x_1,x_2] = \frac{6-2}{3-2} = 4$	
$x_2 = 3$	$f[x_2] = 6$		

$$p^*(x) = 3 - 1(x-1) + \frac{5}{2}(x-1)(x-2)$$

Interpolation nach Neville und Aitken

- ohne P^* explizit zu bestimmen, kann der Funktionswert $p^*(z)$ berechnet werden

$P_{iK}(x) \in \mathbb{P}_K$ ist Interpolationspolynom zu Stützstellen

$x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+K}$

$P_{i0}(x) = y_i$

Beh:

$$P_{iK+1}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+K+1} - x_i} \cdot P_{i+1K}(x) + \left(1 - \frac{x - x_i}{x_{i+K+1} - x_i}\right) P_{iK}(x)$$

für die Stützstellen

$x_j \in \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}, x_{i+k+1}\}$

muss gelten: $P_{ik+1}(x) = y_j$

1) Fall: $x_j = x_i$

$$P_{ik+1}(x_i) = 0 + (1-0) \cdot \underbrace{P_{ik}(x_i)}_{y_i} = y_i$$

2) Fall: x_j mit $i+1 \leq j \leq i+k$

$$P_{ik+1}(x_j) = \frac{x_j - x_i}{x_{i+k+1} - x_i} \cdot \underbrace{P_{i+1k}(x_j)}_{y_j} + \left(1 - \frac{x_j - x_i}{x_{i+k+1} - x_i}\right) \cdot \underbrace{P_{ik}(x_j)}_{y_j}$$

$$= y_j \checkmark$$

3) Fall: $P_{ik+1}(x_{i+k+1})$

$$= 1 \cdot y_{i+k+1} + \underbrace{(1-1)}_{=0} \cdot P_{ik}(x_{i+k+1}) = y_{i+k+1}$$