2.5.2012

Zur Abschätzung des Interpolationsfehlers

Sei $z \in [a,b]$ beliebig, aber fest

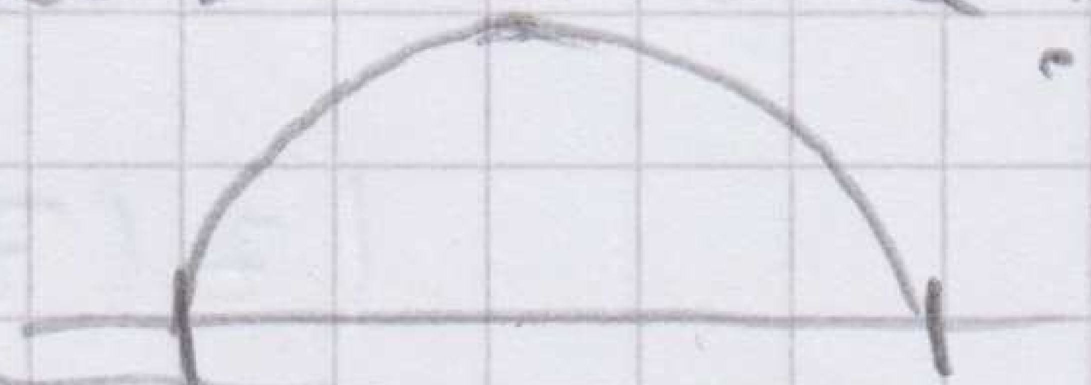
Setze $K = \dfrac{f(z) - p^*(z)}{(z-x_0)\cdot(z-x_1)\cdot\ldots\cdot(z-x_n)} \in \mathbb{R}$

und $g(x) = f(x) - p^*(x) - K(x-x_0)(x-x_n)$

g hat $(n+2)$ Nullstellen, denn

$g(x_i) = 0$ für $0 \leq i \leq n$ und

Satz von Rolle?



$g(z) = 0$, denn

$$g(z) = f(z) - p^*(z) - K\underbrace{(z-x_0)\ldots(z-x_n)}_{f(z)-p^*(z)} = 0$$

... dann hat $g'(x)$ mind. $(n+1)$ Nullstellen

$g''(x)$ " n Nullstellen

$g^{(n+1)}$ " 1 Nullstelle $\chi \in$ x_i

$$\Rightarrow 0 = g^{(n+1)}(\chi) = f^{(n+1)}(\chi) - 0 - K(n+1)! \quad \Big| : (n+1)!$$

$$\Rightarrow K = \frac{f^{(n+1)}(\chi)}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \frac{f(z)-p^*(z)}{(z-x_0)\cdots(z-x_n)} = \frac{f^{(n+1)}(\chi)}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow f(z)-p^*(z) = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\chi)}{(n+1)!}}_{\le \frac{M}{(n+1)!}} \underbrace{(z-x_0)\cdots(z-x_n)}_{\text{wird groß, wenn } z \notin (x_0,x_n) \text{, also bei Extrapolation}}$$

$\omega(z)$ oszilliert, wenn n groß

Bsp (Abschätzung für Interpolations-Fehler)

$f(x) = \ln(1+x)$

a) lineare Interpolation mit $x_0 = 0, x_1 = 1$

$$f(z) - p^*(z) = \frac{f''(\chi)}{2!}(z-0)(z-1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \; f''(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}$$

also

$$|f(z)-p^*(z)| = \frac{1}{2}\frac{|z(z-1)|}{(1+\chi)^2} \le \frac{1}{8}$$

für $z \in [0,1]$

$$|z(z-1)| \le \left|\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\right| = \frac{1}{4}$$

b) quadratische Interpolation

mit $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$

⋮

@home

⋮

$$|f(z) - p^*(z)| \leq \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{36} \quad \text{für } z \in [0,1]$$

Hermite-Interpolation

· nicht nur Fkt-Werte, sondern auch Ableitungs-Werte sind vorgegeben

Bsp

a) $x_0 = 0 : f(0) = -1, \; f'(0) = -2$

$x_1 = 1 : f(1) = 0, \; f'(1) = 10, \; f''(1) = 40$

Polynom $p^*(x)$ vom Grad

$$n = \underbrace{n_0}_{=2} + \underbrace{n_1}_{=3} - 1 = 4$$

mit $p^{*(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ für $k = 0, \ldots 1$

$p^{*(k)}(x_1) = f^{(k)}(x_1)$ für $k = 0, \ldots 2$

Berechnung mit dividierten Differenzen unter Beachtung

$$f[\underbrace{x_i \cdot x_i \cdot \ldots x_i}_{(l+1) \text{ Stück}}] = \frac{f^{(l)}(x_i)}{l!}$$

Differenzen-Schema:

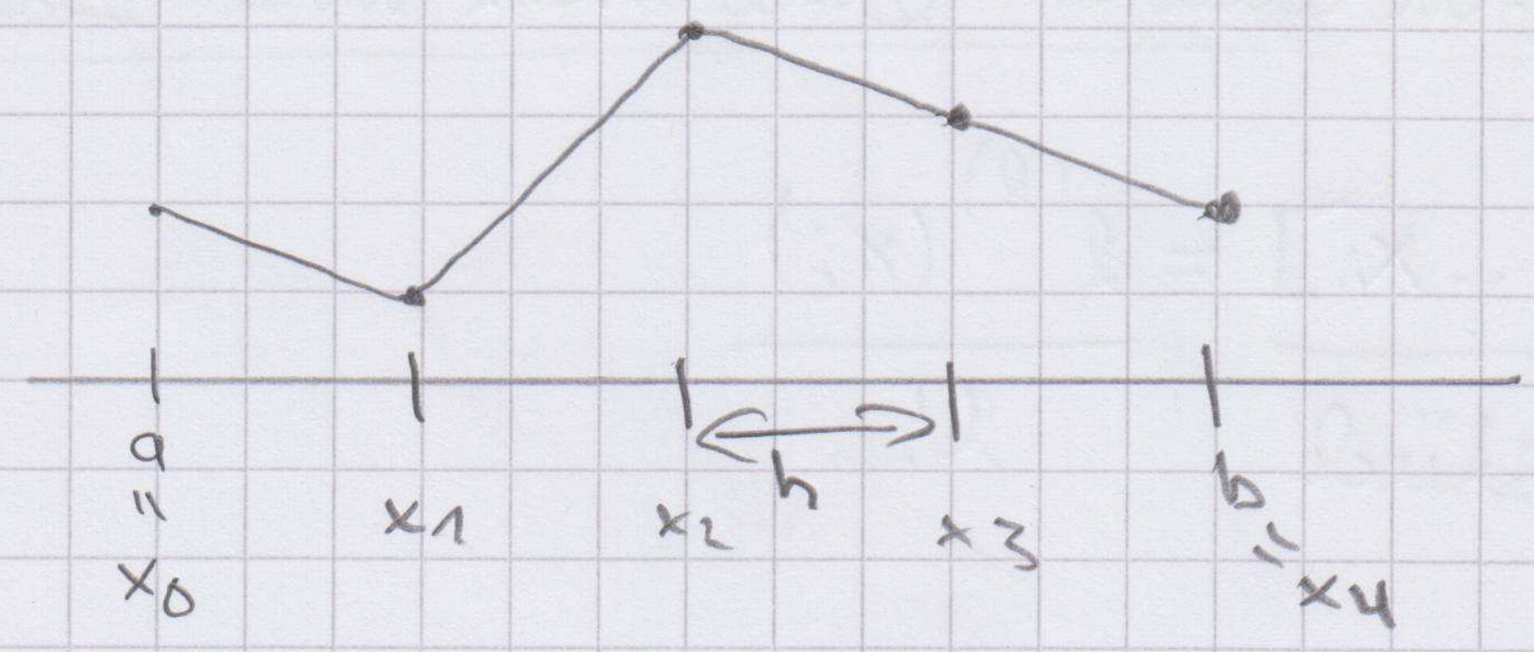
$$
\begin{array}{c|lllll}
0 = x_0 & f[x_0] = -1 & & & & \\
 & & f[x_0,x_0] = f'(x_0) = -2 & & & \\
0 = x_0 & f[x_0] = -1 & & f[x_0,x_0,x_1] = \frac{1-(-2)}{1-0} = 3 & & \\
 & & f[x_0,x_1] = \frac{0-(-1)}{1-0} = 1 & & \ldots & \\
1 = x_1 & f[x_1] = 0 & & f[x_0,x_1,x_1] = \frac{10-1}{1-0} = 9 & & \\
 & & f[x_1,x_1] = f'(x_1) = 10 & & \ldots & \\
1 = x_1 & f[x_1] = 0 & & f[x_1,x_1,x_1] = \frac{f^{(2)}(x_1)}{2} = 20 & & \\
 & & f[x_1,x_1] = f'(x_1) = 10 & & & \\
1 = x_1 & f[x_1] = 0 & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\ldots & \frac{9-3}{1-0} = 6 & \\
 & & \frac{11-6}{1-0} = 5 \\
\ldots & \frac{20-9}{1-0} = 11 &
\end{array}
$$

$$p^*(x) = -1 + (-2)(x-0) + 3(x-0)(x-0) + 6(x-0)(x-0)(x-1)$$
$$+ 5(x-0)^2 \cdot (x-1)^2$$

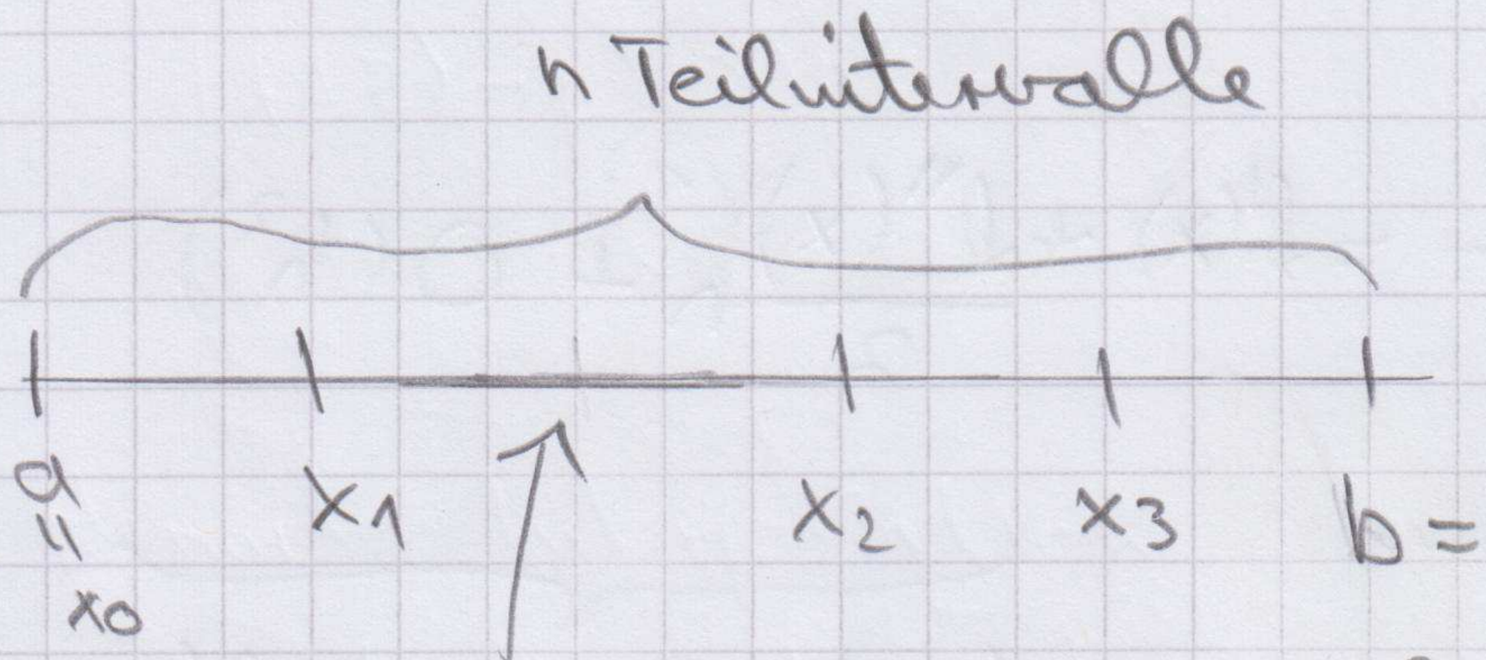
stückweise Polynominterpolation:

z.B. stückweise linear



Spline-Interpolation

- stückweise glatte Interpolation
- kubische Splines:



S ist Polynom vom Grad 3 auf $[x_i, x_{i+1}]$

$$S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$$

Anzahl Koeffizienten: $\underline{4n}$

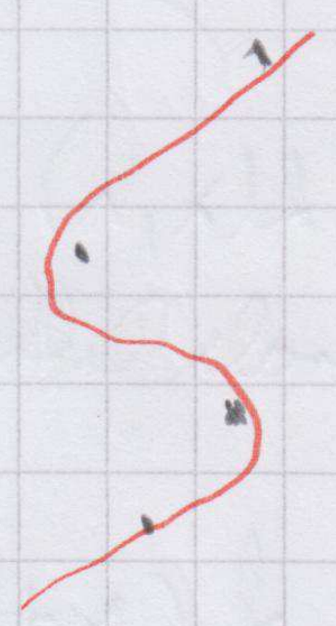
Bedingungen

S, S', S'' sind stetig auf $[a,b]$

nur $(4n-2)$ Bedingungen + 2 Zusatzbedingungen

Straklatte ≙ Spline

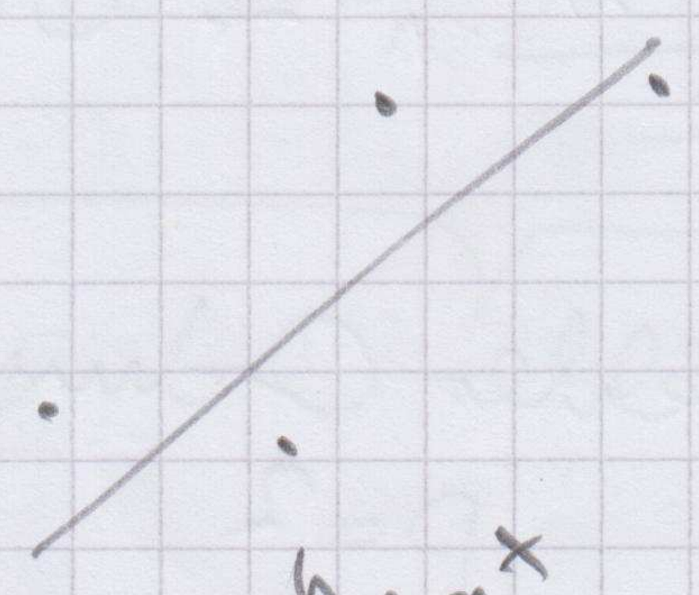
eingespannt



minimal Energie ≙ minimale Krümmung

$$f(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$$

$$\ln(f(t)) = \ln(a) + b \cdot t$$



$b \cdot a^x$

Numerisches Differenzieren mit Taylor

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{6}h^3 + \dots \quad (1)$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)\cdot h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f'''(x)}{6}h^3 + \dots \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\substack{D_1^+ f(x,h) \\ \text{Vorwärts Differenz}}} = f'(x) + \underbrace{\frac{f''(x)}{2}h^{1} + O(h^2)}_{\substack{\text{Diskretisierungs-Fehler} \\ \text{mit der Ordnung } p=1}}$$

$$(2) \Rightarrow \underbrace{\frac{f(x)-f(x-h)}{h}}_{\substack{D_1^- f(x,h) \\ \text{Rückwärts Differenz}}} = f'(x) - \underbrace{\frac{f''(x)}{2}h^{1} + O(h^2)}_{\substack{\text{Fehler mit der Ordnung} \\ p=1}}$$

$$(1)-(2) \Rightarrow \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}}_{\substack{D_1^z f(x,h) \\ \text{zentrale Differenz}}} = f'(x) + \underbrace{\frac{f'''(x)}{6}\cdot h^{2} + O(h^4)}_{\substack{\text{Fehler-Ordnung} \\ p=2}}$$

$$(1)+(2)-2\cdot f(x) \Rightarrow \underbrace{\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}}_{D_2^z f(x,h)}$$

$$= f''(x) + \underbrace{\frac{f^{(4)}(x)}{12}\cdot h^{2} + O(h^4)}_{\substack{\text{Fehler Ordnung} \\ p=2}}$$

Problem: Auslöschung:

Auswerte-Fehler sei:

$$|\tilde{f}(y) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Gesamt-Fehler für $D_1^+ f$

$$|\tilde{D}_1^+ f(x,h) - f'(x)|$$

$$= |\tilde{D}_1^+ f(x,h) - D_1^+ f(x,h) + D_1^+ f(x,h) - f'(x)|$$

Dreiecks-Ungleichung

$$\leq |\tilde{D}_1^+ f(x,h) - D_1^+ f(x,h)| + \underbrace{|D_1^+ f(x,h) - f'(x)|}_{\leq \frac{h}{2}\cdot C}$$

$$= \left| \frac{\tilde{f}(x,h) - \tilde{f}(x) - (f(x,h) - f(x))}{h} \right|$$

$$\leq \frac{1}{h}\left(\underbrace{|\tilde{f}(x+h) - f(x+h)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|\tilde{f}(x) - f(x)|}_{< \varepsilon} \right)$$

Gesamt-Fehler

$$\leq \underbrace{\frac{2\varepsilon}{h}}_{\text{Rundungsfehler}} + \underbrace{\frac{h}{2}\cdot C}_{\text{Diskretisierungsfehler}}$$

← gegenläufig bzgl. h

Differenzen höherer Ordnung mit Polynominterpolation

a) Lineare Interpolation

$$x_0 = x - h, \; x_1 = x + h$$

$$p^*(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0)$$

$$f'(x) \approx p^{*\prime}(x) = \frac{f(x_1)}{\underbrace{x_1 - x_0}_{2h}} + \frac{f(x_0)}{\underbrace{x_0 - x_1}_{-2h}}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}}_{D_1^7 f(x,h)}$$

b) Quadratische Interpolation

$x_0 = x,\ x_1 = x+h,\ x_2 = x+2h$

$$p^*(x) = f(x_0) \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$+ f(x_1) \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$+ f(x_2) \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$f(x) \approx p^{*\prime}(x) =$

$$\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \left(\underbrace{(x-x_2)}_{-2h} + (x-x_1) \right)$$

$$+ \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_0)} \left((x-x_2) + (x-x_0) \right)$$

$$+ \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \left((x-x_1) + (x-x_0) \right)$$

$$= -\frac{3}{2} \frac{f(x)}{h} + 2 \frac{f(x+h)}{h} - \frac{1}{2} \frac{f(x+2h)}{h}$$