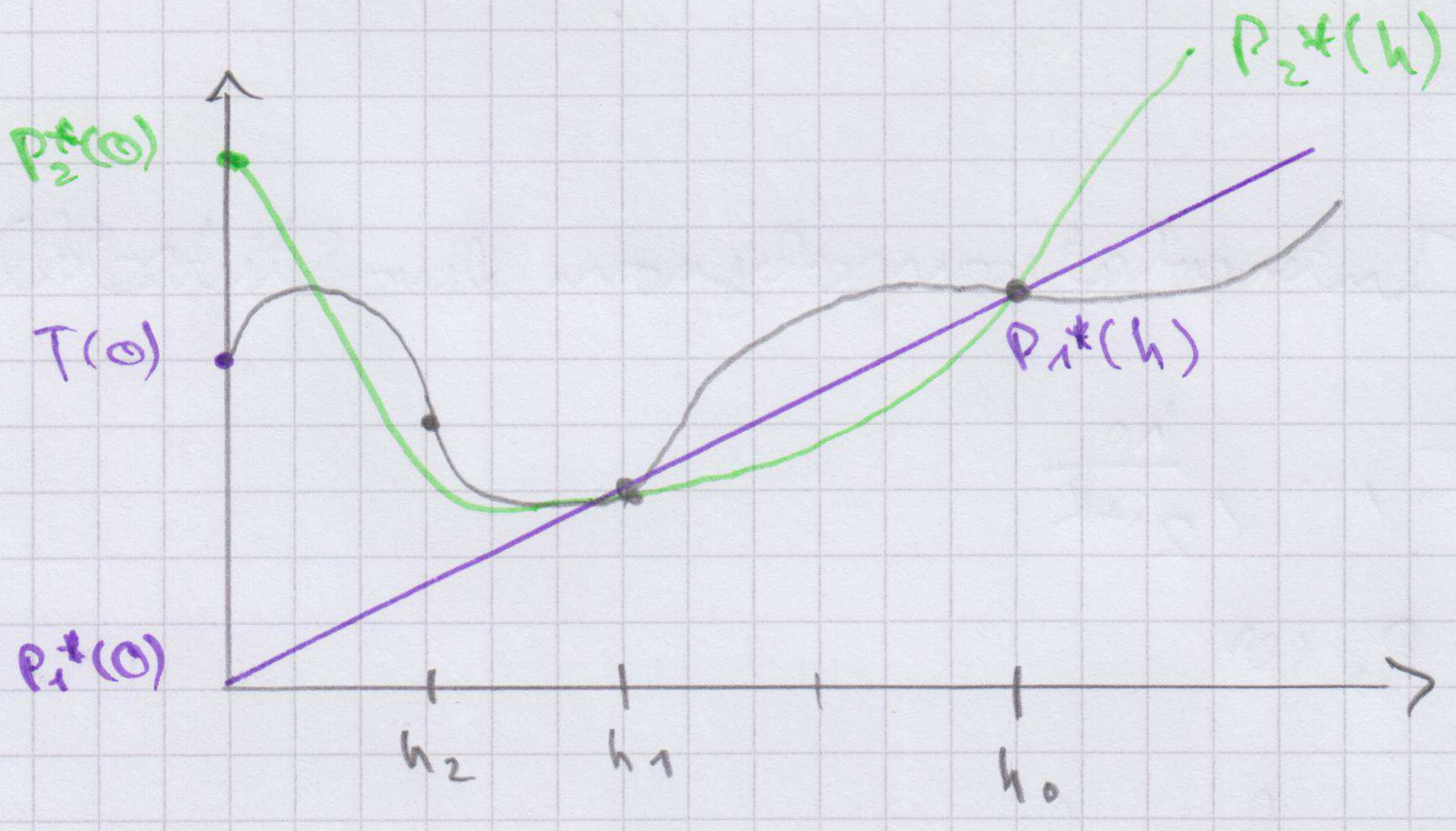
$$T(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \underbrace{\tfrac{1}{2} f''(x) h}_{a_1} + \underbrace{\tfrac{1}{6} f'''(x) h^2}_{a_2} + \underbrace{\tfrac{1}{24} f^{(IV)}(x) h^3}_{a_3} + O(h^4)$$

gesucht: $T(0) = \lim_{h \to 0} T(h)$

Problem: $T(0)$ kann nicht durch Einsetzen von $h=0$ in die obige Darstellung

Idee: - Approximiere $T(h)$ durch Interpolationpolynom $p_n^*(h)$

- berechnen extrapolieren Wert $f_n^*(0)$



z.B. $h_0,\ h_1 = \frac{h_0}{2}$

$T(h_0) = D_1^+ f(x, h_0) \qquad T(h_1) = D_1^+ f(x, \frac{h_0}{2})$

$$P_1^*(h) = D_1^+ f(x, h_0) \cdot \frac{h - \frac{h_0}{2}}{h_0 - \frac{h_0}{2}} + D_1^+ f(x, \tfrac{h_0}{2}) \cdot \frac{h - \frac{h_0}{2}}{\frac{h_0}{2} - h_0}$$

Extrapolation:

$$P_1^*(0) = D_1^+ f(x, h_0) \cdot (-1) + 2 \cdot D_1^+ f(x, \tfrac{h_0}{2}) = \hat{D}_1^+ f(x, h_0)$$

$$= \frac{2 \cdot f(x, \frac{h_0}{2}) - f(x)}{h_0/2} - \frac{f(x+h_0) - f(x)}{h_0}$$

$= \ldots$

$$\frac{-f(x+h_0)+4\cdot f(x+\frac{h_0}{2})-3f(x)}{h_0} = f'(x)+O(h^2)$$

Fehlerordnung: 2, hat sich um 1 verbessert

Berechnung von $f_m^*(0)$ mit Hilfe der Neville-Aitken Interp.

Stützstellen $\underbrace{h_0,\ \overset{=h_1}{\frac{h_0}{2}},\ \dots\ \overset{=h_n}{\frac{h_0}{2^n}}}_{n+1 \text{ Stück}}$

Stützwerte:

$T(h_0), T(\frac{h_0}{2}), \dots, T(\frac{h_0}{2^n})$

Bezeichnung

$P_{ik}(h)$ ist Interpolationpolynom für Stützstellen

$\frac{h_0}{2^i}, \frac{h_0}{2^{i+1}}, \dots, \frac{h_0}{2^{i+k}}$

sei $T_{ik} = P_{ik}(0)$

=> Rekursionsformel

$$T_{ik} = \frac{-h_i \cdot T_{i+1,k-1} - ((-h_{i+k})\cdot T_{i,k-1}) + h_{i+k}\cdot T_{i+1,k-1} - h_{i+k}\cdot T_{i+1,k-1}}{h_{i+k}-h_i}$$

$$= T_{i+1,k-1} + \frac{h_{i+k}(T_{i,k-1}-T_{i+1,k-1})}{h_{i+k}-h_i}$$

$$= T_{i+1,k-1} + \frac{T_{i+1,k-1}-T_{i,k-1}}{\underbrace{\frac{h_i}{h_{i+k}}}_{2^k}-1}$$

Extrapolation für die zentrale Differenz

$$T(h) = D_1^Z f(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2 \cdot h}$$

$$= f'(x) + a_1 h^2 + a_2 h^4 + a_3 h^6 + a_4 h^3 + \ldots$$

also $T(h) = P_n(h^2) + O(h^{2(n+1)})$

$\Rightarrow$ Interpolation mit Stützstellen $h_0^2, h_1^2, h_2^2, \ldots h_n^2$

Stützwerte $T(h_0), T(h_1), T(h_2), \ldots, T(h_n)$

$$T_{ik} = T_{i+1,k-1} + \frac{T_{i+1,k-1} - T_{i,k-1}}{\underbrace{\left(\frac{h_i}{h_{i+k}}\right)^2}_{4^k} - 1}$$

Von $k-1$ nach k verbessert sich die Fehlerordnung von 2.

Kapitel 7

$\Rightarrow$ Numerische Integration

Kondition von Berechnung $\int_a^b f(x)\,dx$

Störung $\tilde{f}$, mit $\|f - \tilde{f}\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f(x) - \tilde{f}(x))\,dx\right|$$

$$\leq \int_a^b \underbrace{|f(x) - \tilde{f}(x)|}_{\leq \|f - \tilde{f}\|_\infty}\,dx \leq \underbrace{\|f - \tilde{f}\|_\infty}_{< \varepsilon} \underbrace{\int_a^b 1\,dx}_{(b-a)}$$

$$\leq (b-a) \cdot \varepsilon$$

Absolute Kondition

gut, absolut konditioniert, wenn $(b-a) \approx O(1)$

→ relative Kondition

$$\frac{\left|\int_a^b (f(x) - \tilde{f}(x) \cdot dx)\right|}{\left|\int_a^b f(x) dx\right|} \leq \frac{(b-a) \cdot \|f-\tilde{f}\|_\infty}{\left|\int_a^b f(x)dx\right|} \cdot \frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_\infty} =$$

$$= \frac{\int_a^b \|f\|_\infty \, dx}{\left|\int_a^b f(x)dx\right|} \cdot \frac{\|f-\tilde{f}\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

K_{rel} wird groß, wenn $f(x)$ stark oszilliert!

Quadrator:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b f_n^*(x)\,dx$$

Interpolationspolynom: $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$

geschlossene Newton-Cotes Formel:

$a = x_0 \;\wedge\; x_n = b$

offene Newton-Cotes Formel:

$a < x_0 \;\wedge\; x_n < b$

I) geschlossene Formel:
äquidistante Stützstellen

$$x_i = a + i \cdot h, \text{ für } i = 0, 1, \ldots, n \text{ und } h = \frac{(b-a)}{n}$$

→ Lagrange Darstellung

$$P^*(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot L_i(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b P^*(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \underbrace{\int_a^b L_i(x)\,dx}_{\text{Gewicht } \alpha_i^n}$$

$$\alpha_i^n = \int_a^b \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}\,dx \qquad \left(\begin{array}{l}\text{Substitution}\\ x = a+t\cdot h\\ \frac{dx}{dt} = h \Rightarrow dx = h\cdot dt\end{array}\right)$$

$$= \int_0^n \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \underbrace{\frac{a+t\cdot h-(a+k\cdot h)}{a+i\cdot h-(a+k\cdot h)}}_{\frac{t-k}{i-k}} \cdot h\cdot dt$$

$$= h\cdot \underbrace{\int_0^n \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{t-k}{i-k}\,dt}_{\hat{\alpha}_i^n}$$

$\hat{\alpha}_i^n$: unabhängig von a und b $\Rightarrow$ siehe Tabelle

a) Trapez-Regel:

$n=1,\ x_0=a,\ x_1=b,\ h=\frac{b-a}{1}=b-a$

$$\hat{\alpha}_0^1 = \int_0^1 \frac{t-1}{0-1}\,dt = (-1)\left[\tfrac{1}{2}t^2-t\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\hat{\alpha}_1^1 = \int_0^1 \frac{t-0}{1-0}\,dt = \ldots = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot\left(\tfrac{1}{2}f(a)+\tfrac{1}{2}f(b)\right)$$

geometrisch:

Fläche:

$(b-a)\cdot f(a)\cdot\frac{1}{2}(b-a)\cdot(f(b)-f(a))$

$=(b-a)\cdot\left(\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)\right)$

Beispiel

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln(2) \approx (2-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = 0{,}75$$

Fehler $E_1 = 0{,}056$

Abschätzung für Fehler:

$$E_1(f) = \int_a^b f(x) - f_1^*(x)\,dx = \int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2}\cdot(x-a)\cdot(x-b)\,dx =$$

Abschätzung Fehler für Interpolationspolynom

Verallgemeinter Mittelwertsatz der Integralrechnung

f, g stetig $\wedge$ $(g(x) \geq 0 \vee g(x) \leq 0)$

dann gilt $\exists\, c \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\cdot\int_a^b g(x)\,dx$$

$$= \frac{f''(c)}{2}\cdot\underbrace{\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx}_{-\frac{1}{6}(b-a)^3} = \frac{f''(c)}{12}\cdot h^3$$

Konsistenzordnung 3

Genauigkeitsgrad 1

b) Simpson-Regel: (Kepplersche Faßregel)

$n=2,\ x_0 = a,\ x_1 = \frac{a+b}{2},\ x_2 = b,\ h = \frac{b-a}{2}$

Index

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \alpha_0^2 f(a) + \alpha_1^2 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \alpha_2^2 f(b)$$

Bestimmung der Gewichte über Genauigkeitsgrad,

Forderung: Genauigkeitsgrad ≥ 2

$$\int_a^b 1\,dx = b-a \overset{!}{=} \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2$$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2-a^2) \overset{!}{=} \alpha_0^2 \cdot a + \alpha_1^2 \cdot \frac{a+b}{2} + \alpha_2^2 \cdot b$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3-a^3) = \alpha_0^2 \cdot a^2 + \alpha_1^2 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \alpha_2^2 \cdot b^2$$

LGS

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & \frac{a+b}{2} & b \\ a^2 & \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 & b^2 \end{bmatrix}}_{\text{Vandermonde-Matrize}} \begin{bmatrix} \alpha_0^2 \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-a \\ \frac{1}{2}(b^2-a^2) \\ \frac{1}{3}(b^3-a^3) \end{bmatrix}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \underbrace{\frac{b-a}{6}}_{\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{b-a}{2}}_{\frac{h}{3}}} \left(f(a) + 4\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

Beispiel:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \frac{h}{3}\left(\frac{1}{1} + 4\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\right) = 0{,}6944$$

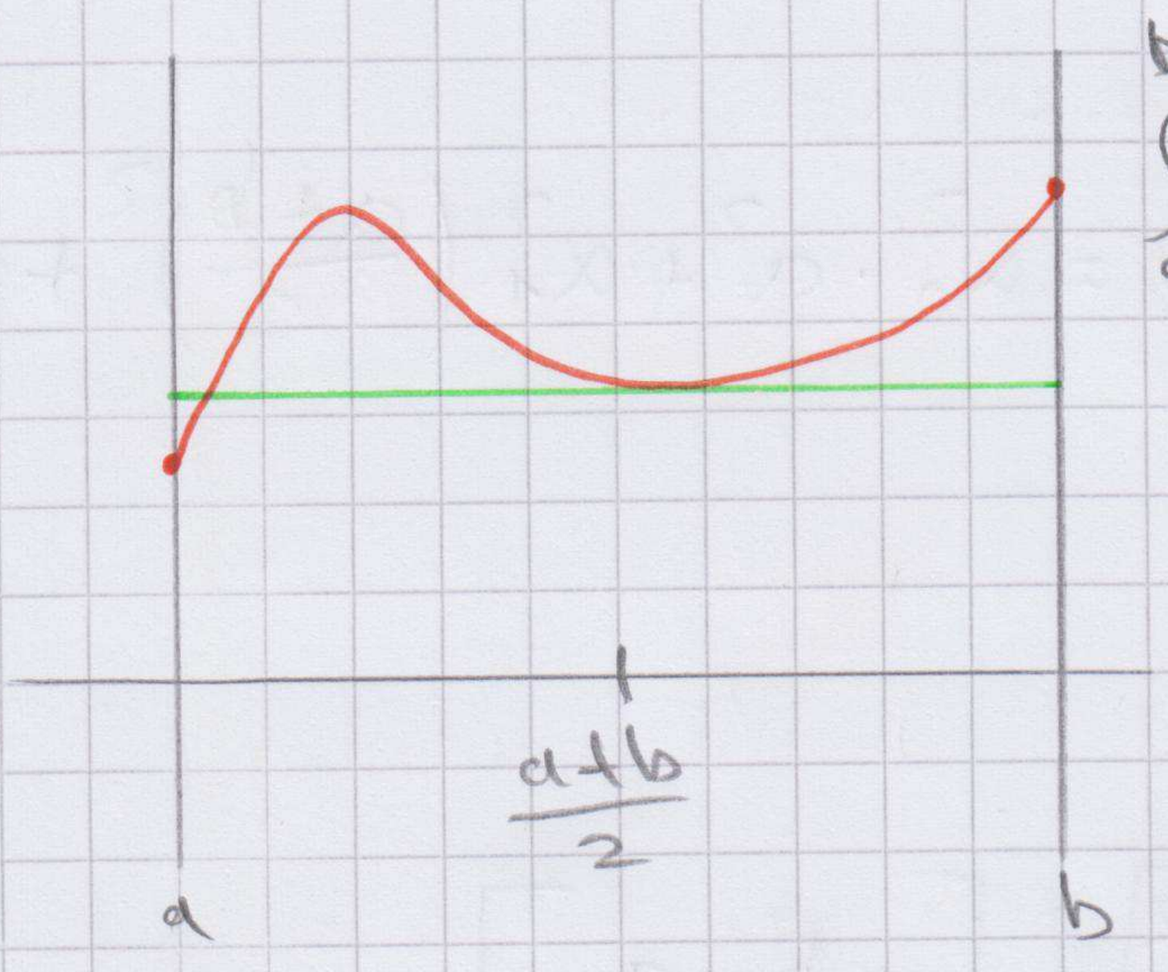
$$h = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \qquad , E_2 = 0{,}00129 = \frac{h^5}{90}\cdot f^{(IV)}(x)$$

wenn n gerade, gewinnt man 1-nte Ordnung bei Genauigkeitsgrad n.

II Offene Formel:

z. B. Mittelpunktformel

$n=0,\ x_i = a+(i+1)\cdot h$ mit $h=\frac{b-a}{n+2}$, $h=\frac{b-a}{2}$



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Bsp

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx (2-1)\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} = 0,\overline{66}$$

$$E_0 = 0,026$$

Statt n zu erhöhen besser Verwendung summierter Formeln

- Zerlege $[a,b]$ in N Teilintervalle $[y_j, y_{j+1}]$

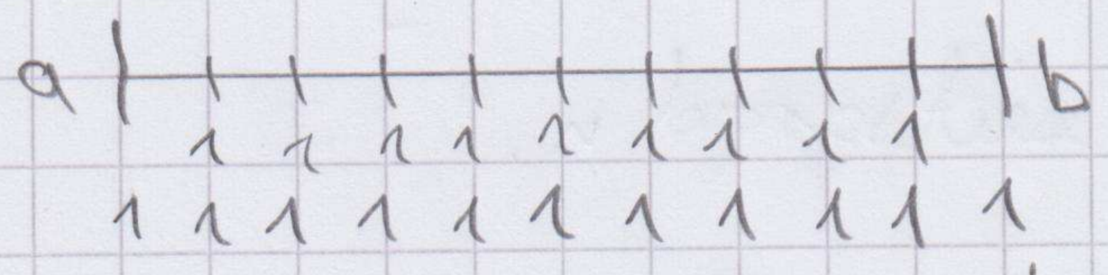
  $y_j = a + j\cdot H$, $H=\frac{(b-a)}{N}$

- Anwendung Quadratur Formel auf $[y_j, y_{j+1}]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)\,dx}_{\approx \sum_{i=0}^{N} \alpha_i^n f(x_i^{(j)})} \quad \text{mit } x_i^{(j)} = y_j + h\cdot i$$

$$h = \frac{H}{n} = \frac{(b-a)}{N\cdot n}$$

$n=1$ (Summierte Trapez-Regel)

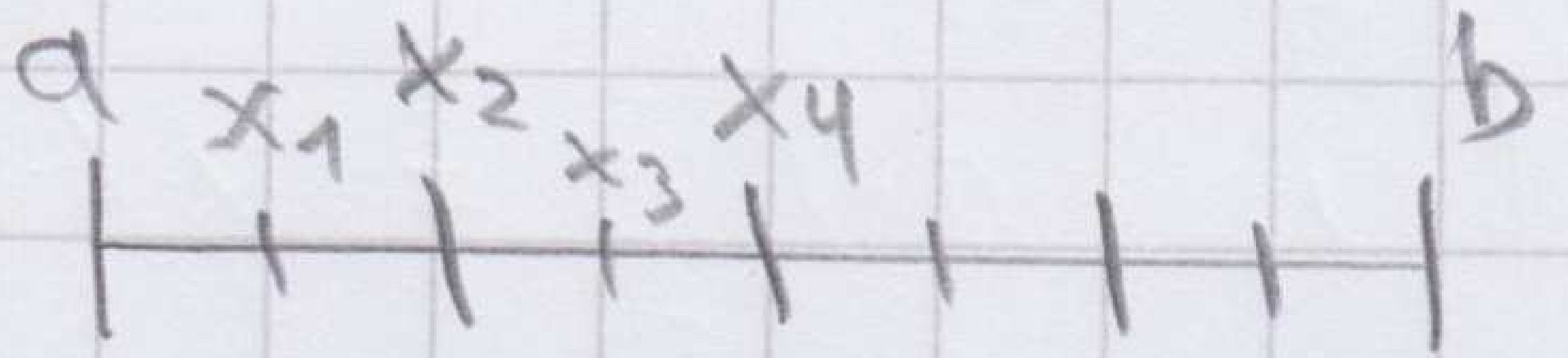


$$h = \frac{H}{1} = H$$

$$T(h) = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\cdot\sum_{k=1}^{n-1} f(a+k\cdot h)\right)$$

$n = 2$ Summierte Simpson-Regel

$$h = \frac{H}{2}$$



y_0 y_1

1 4 1 1 4 1

1 4 1 1 4 1

$$\frac{h}{3}\Big(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(a + 2k\cdot h) +$$

$$+ 4\sum_{k=0}^{N-1} f(a + (2k+1)\cdot h)\Big)$$