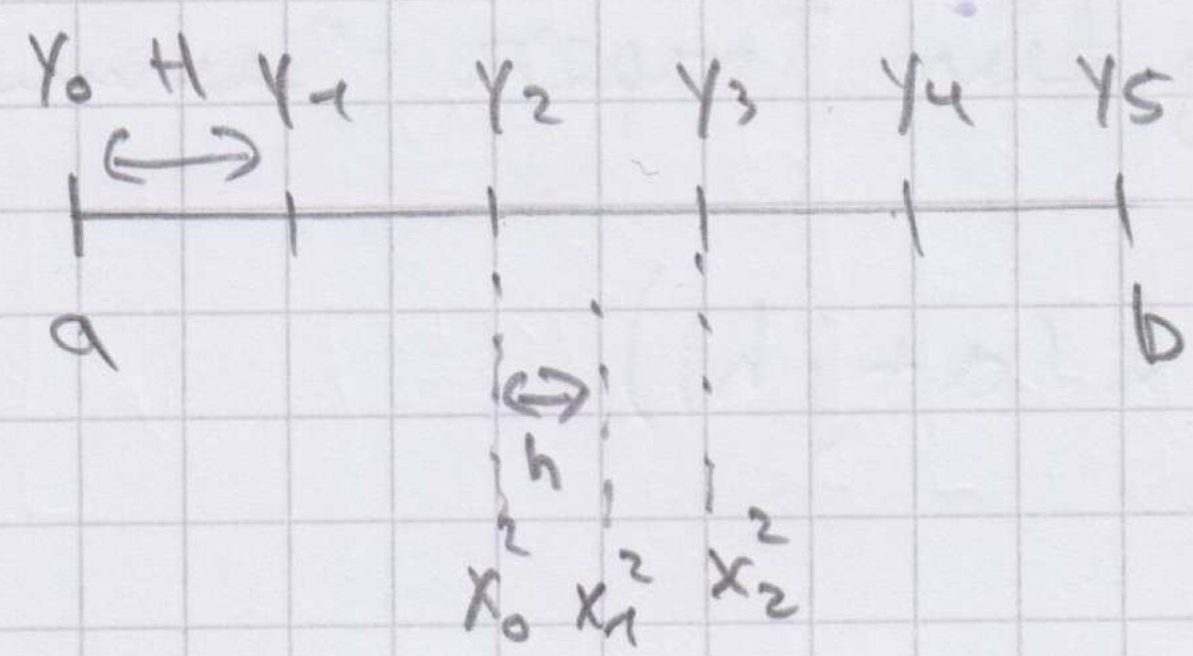
16.5.12

Fehlerabschätzung für summierte Newton Cotes Formeln

$N = 5$



- N Teilintervalle $[y_j, y_{j+1}]$

  $y_j = a + jH \; ; \; H = \frac{b-a}{N}$

- Anwendung von Newton-Cotes auf $[y_j, y_{j+1}]$

  z.B. Simpsons: $n = 2$, $h = \frac{H}{2} = \frac{(b-a)}{2N}$

$$\int_{y_i}^{y_{j+1}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\Big(f(y_j) + 4 f(y_j + h) + f(y_{j+1}) \Big)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h}{3} \underbrace{\Big(f(y_j) + 4(y_j + h) + f(y_{j+1}) \Big)}_{S(f, y_j, y_{j+1})} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fehler}}}{E_{z,N}^{\Sigma}}$$

mit $E_{z,N}^{\Sigma} = \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{\Big(S(f, y_j, y_{j+1}) - \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)\,dx \Big)}_{= \frac{h^5}{90} \cdot f^{(4)}(x_j) \text{ mit } x_j \in [y_j, y_{j+1}]}$

$$= \frac{h^4}{90} \cdot \overbrace{\frac{(b-a)}{2N}}^{h} \sum_{j=0}^{N} f^{(4)}(x_j) = (b-a) \cdot \frac{h^4}{180} \cdot \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N} f^{(4)}(x_j)$$

$f^{(4)}(x)$ mit $x \in [a,b]$

Achtung

Konsistenzordnung ist
um 1 kleiner als
nicht summierte Simpson-Regel

→ Romberg-Integration

Extrapolationsverfahren:

Asymptotische Entwicklung für Trapez-Summe:

$$T(h) = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{N-1} f(a+jh)\right)$$

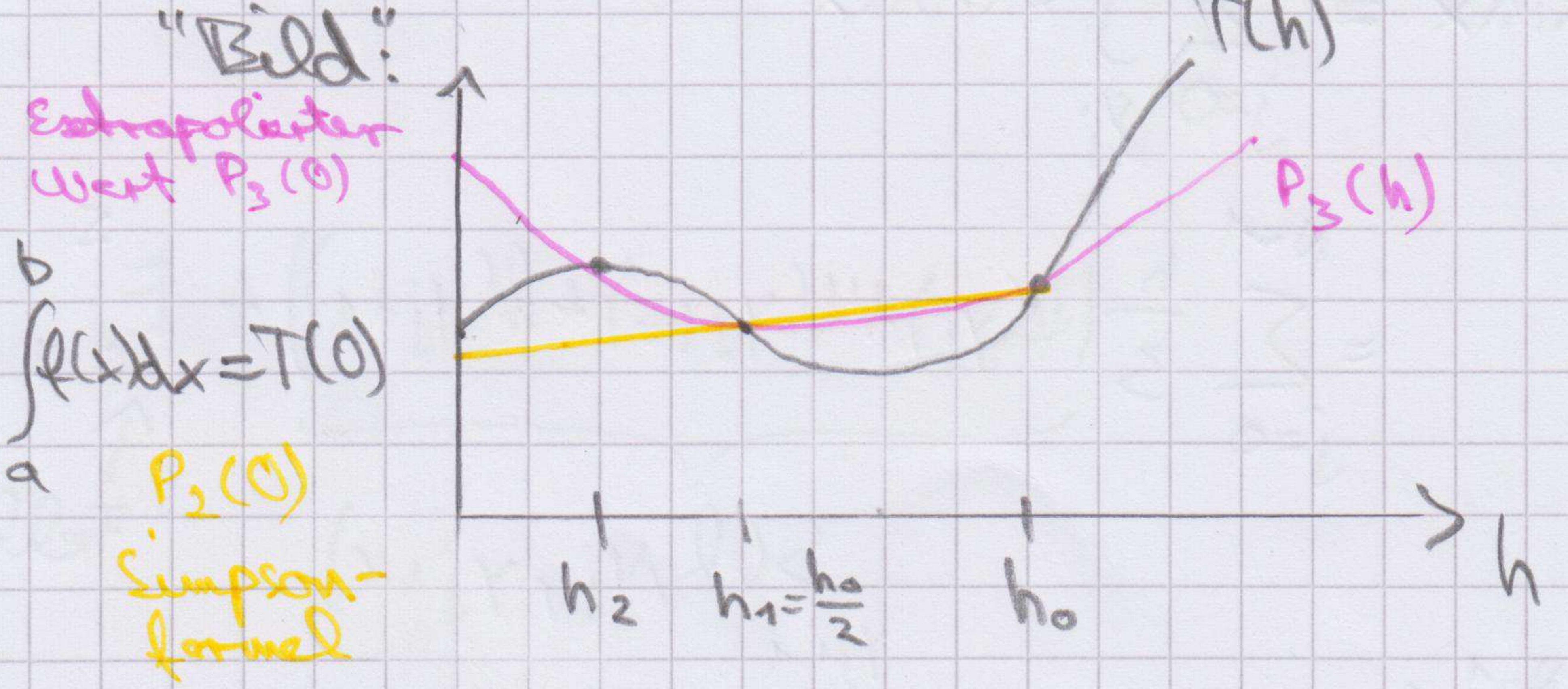
$$= \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx + a_1 h^2 + a_2 h^4 + a_3 h^6 + O(h^8)}_{f_3(h^2)}$$

oder allgemein:

$$f_4(h^2) + O(h^{2(n+1)})$$

Bestimmt $f_n(h^2)$ durch Interpolation

"Bild":



Romberg-Folge: $h_0 = (b-a)$

$$h_i = \frac{h_0}{2^i} \text{ für } i = 1, 2, \dots, n$$

Stützstellen: $h_0^2, h_1^2, h_2^2, \dots, h_n^2$

Stützwerte: $T(h_0), T(h_1), T(h_2), \dots, T(h_n)$

Berechnung mit Neville-Aitken

$T_{ik} = f_{ik}(0)$, $f_{ik}(x)$ ist Interpolationspolynom zu Stützwerten $h_i^2, h_{i+1}^2, \dots, h_{i+k}^2$

$$T_{i,k} = T_{i+1,k-1} + \frac{T_{i+1,k-1} - T_{i,k-1}}{4^k - 1}$$

Speziell:

$$T_{0,0} = T(h_0) = \frac{h_0}{2}(f(a) + f(b))$$

$$T_{1,0} = T\Big(\underbrace{\frac{h_0}{2}}_{h_1}\Big) = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_0}{2}\left(f(a) + f(b) + 2 \cdot f(a+h_1)\right)$$

$$T_{0,1} = T_{1,0} + \frac{T_{1,0} - T_{0,0}}{\underbrace{4-1}_{3}} = \frac{1}{3} \cdot \left(4\,T\Big(\frac{h_0}{2}\Big) - T(h_0)\right)$$

$$= \dots = \underbrace{\frac{h_1}{3}\left(f(a) + f(b) + 4(a+h_1)\right)}_{\text{Simpsonformel}}$$

→ Gauss Quadratur:

Maximaler Genauigkeitsgrad ist $2n+1$ für $n+1$ Stützstellen, denn

Annahme: max. Genauigkeitsgrad ist $2n+2$.

setze: $f(x) = \underbrace{\prod_{j=0}^{n} (x - x_j)^2}_{\geq 0} \in \mathbb{P}_{2n+2}$

$$0 < \int_a^b f(x) \cdot \omega(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^n \cdot \underbrace{P(x_i)}_{=0} = 0 \; \lightning$$

Notwendige Bedingungen für exakte Quadratur bis zum Grad $2n+1$.

Setze $q_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$

Sei $p(x) \in \mathbb{P}_{2n+1}$ beliebig

Polynomdivision mit Rest $\Rightarrow \exists\, s(x), r(x) \in \mathbb{P}_n$:

$f(x) = s(x) \cdot q_{n+1}(x) + r(x)$

$$\int_a^b p(x) \cdot w(x) dx = \int_a^b \underbrace{s(x) \cdot q_{n+1}(x)}_{\in \mathbb{P}_{2n+1}} \cdot w(x) dx + \int_a^b r(x) \cdot w(x) dx$$

$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i^n \cdot s(x_i) \cdot \underbrace{q_{n+1}(x_i)}_{=0}}_{=0} + \int_a^b r(x) \cdot w(x) dx$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^b s(x) \cdot q_{n+1}(x) \cdot w(x) dx = 0}_{\langle s(x), q_{n+1}(x) \rangle_w = 0 \quad \text{Skalarprodukt}} \quad \forall s(x) \in \mathbb{P}_n$$

$\Rightarrow q_{n+1}(x) \perp \mathbb{P}_n(x)$

also $q_{n+1}(x)$ ist Orthogonalpolynom.

Stützstellen x_i sind genau die Nullstellen von $q_{n+1}(x)$

Bestimmung der Gewichte:

$$\int_a^b \underbrace{L_j(x)}_{\prod_{h=0}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)}} \cdot w(x) dx = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \alpha_1^n \cdot \underbrace{L_j(x_i)}_{\delta_{ij}}}_{\alpha_j^n}$$

$\rightarrow$ Legendre-Polynom

Orthogonal auf $[-1,1]$ mit $w(x)=1$

$q_0(x) = 1$, $q_1(x) = x$, $q_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow$ Nst: $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

, $q_3(x) = \frac{15}{2}x^3 - \frac{9}{2}x \Rightarrow$ Nst: $0, \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$