Umschreiben auf System 1-er Ordnung

Bsp. Schwingungsgleichung:

$$y_1(t) = y(t),\ y_2(t) = y'(t)$$

$$y_1'(t) = y'(t) = y_2(t)$$

$$y_2'(t) = y''(t) = \frac{1}{m}\left(-r\cdot \underbrace{y'(t)}_{y_2(t)} - K\cdot \underbrace{y(t)}_{y_1(t)} + \sin(\omega t)\right)$$

System 1-er Ordnung:

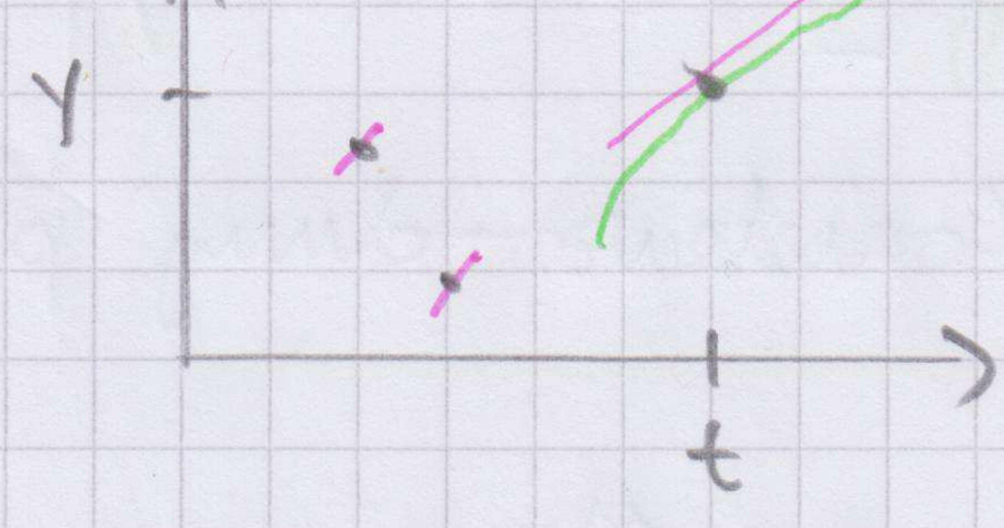
$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}'}_{\vec{y}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_2(t) \\ \frac{1}{m}\left(-r\cdot y_2(t) - K\cdot y_1(t) + \sin(\omega t)\right) \end{bmatrix}}_{\vec{f}(t,\, y(t))}$$

Anfangsbedingung:

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{y}_0}$$

DGL 1-er Ordnung

$$y' = f(t, y(t)),\ y(t_0) = y_0$$



Richtungsfeld

Steigung der Tangente?

$\rightarrow$ ja, $f(t, y(t))$

$\rightarrow$ Euler-Verfahren

Vorwärtsdifferenz:

$$\frac{y(t_i+h) - y(t_i)}{h} \approx y'(t_i) = f(t_i, y(t_i))$$

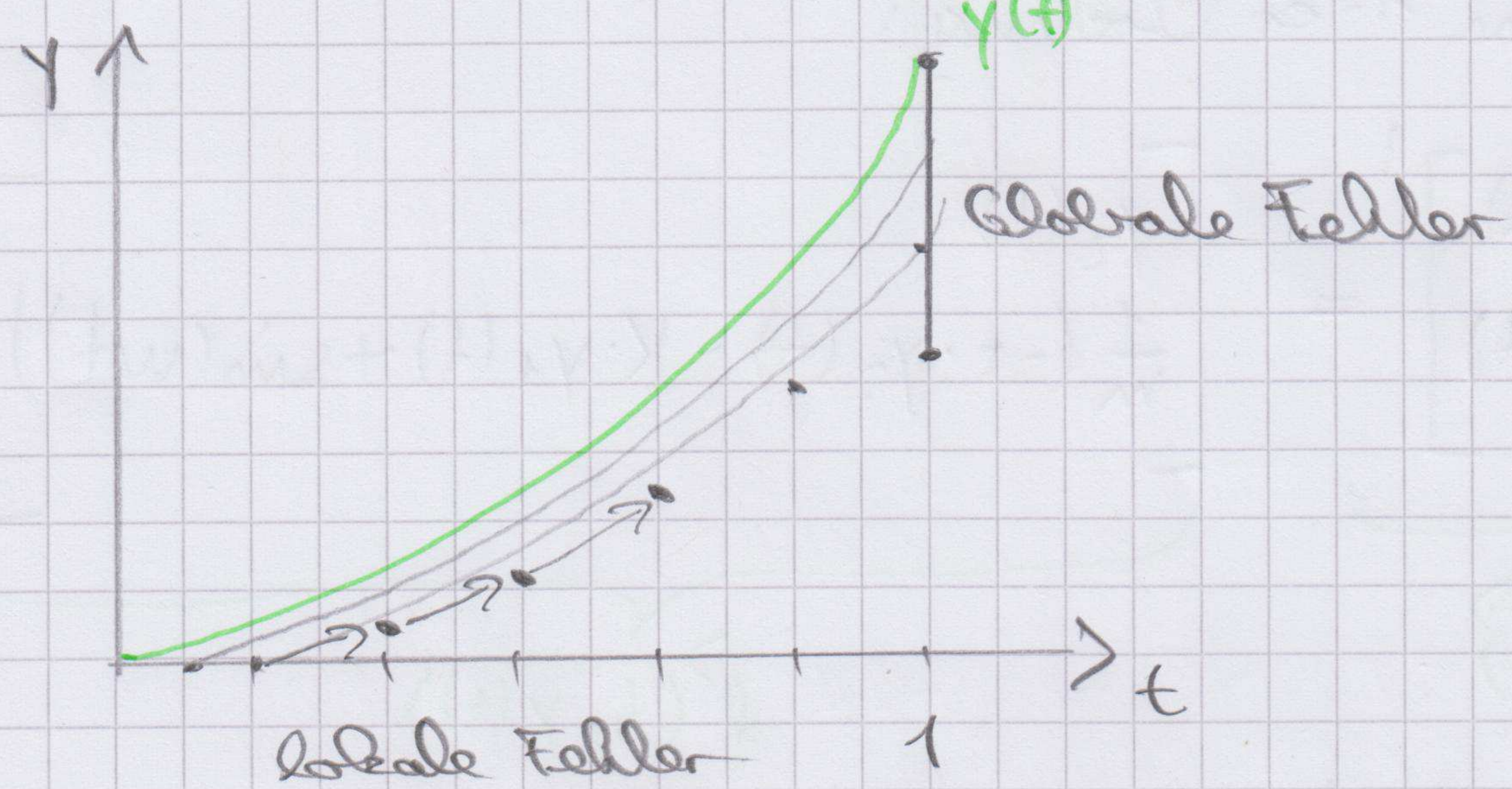
Auflösen:

$$y(t_i+h) \approx y(t_i) + h\cdot f(t_i, y(t_i))$$

Näherung $y_{i+1} = y_i + h\cdot f(t_i, y_i)$

Beispiel:

$y' = 2\cdot t$, $y(0)=0$ $\Rightarrow$ $y(t)=t^2$



→ lokale Fehler:

$$\tau_h(t_{i+1}) = y(\underbrace{t_{i+1}}_{t_i+h}) - [y(t_i) - h\cdot f(t_i, y(t_i))]$$

exakter Fehler

Fehler pro Schritt

Taylor:

$$y(t_i+h) = y(t_i) + h\cdot y'(t_i) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow \tau_h(t_{i+1}) = y(t_i) + h\cdot \underbrace{y'(t_i)}_{f(t_i,\,y(t_i))} + O(h^2) - [y(t_i) - h\cdot f(t_i, y(t_i))]$$

$$= O(h^2) \text{ (Konsistenzordnung } p=1)$$

→ globale Fehler

$$e_h(t_i) = y_i - y(t_i) = O(h^1) \text{ (Konvergenzordnung } p=1)$$

Einschrittverfahren:

• Verfahrensfunktion:

$\phi = \phi(t_i, y_i) = f(t_i, y_i)$ explizit, unabhängig von y_{i+1}

Verfahren höherer Ordnung

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

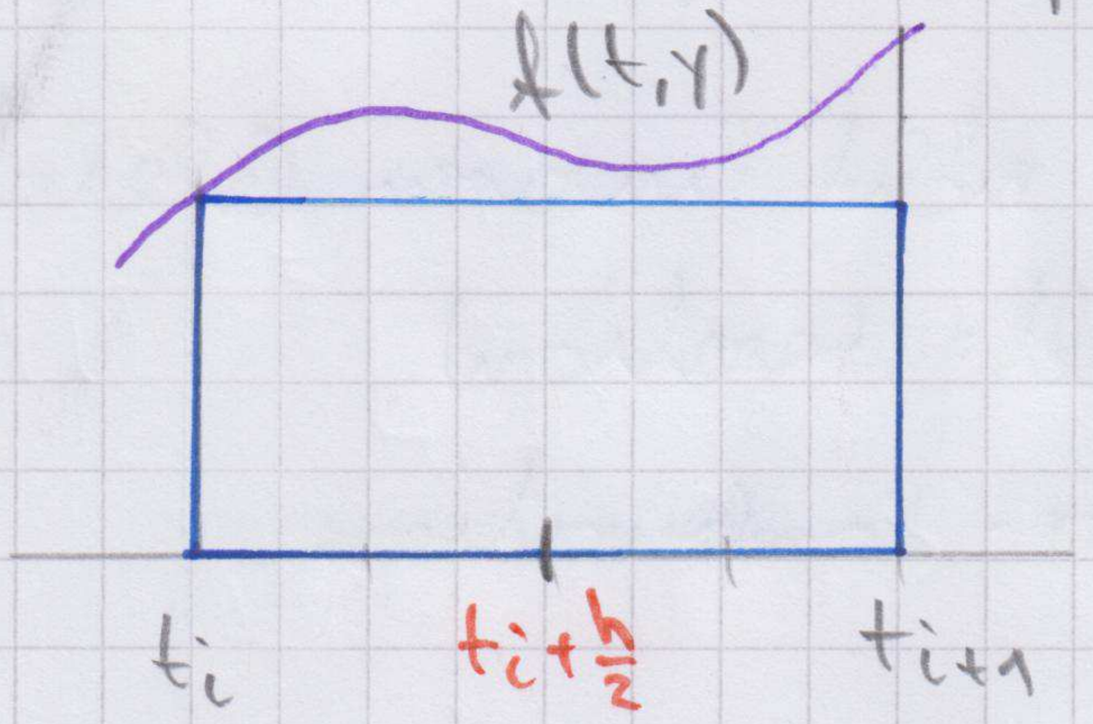
Integrieren:

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t)\,dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\,dt$$

$$\Rightarrow y(t_{i+1}) = y(t_i) + \underbrace{\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\,dt}_{\text{Näherung durch Quadraturformel}}$$

① Mittelpunktregel

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\,dt \approx \underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{h} \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, \underbrace{y\left(t_i + \frac{h}{2}\right)}_{*}\right)$$



Berechnung mit Euler

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= f(t_i, y_i) \\ * \; y_{i+\frac{1}{2}} &= y_i + \frac{h}{2} \cdot K_1 \end{aligned}\right\} \text{Mittelpunktregel}$$

$$\left.\begin{aligned} K_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_{i+\frac{1}{2}}\right) \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot K_2 \end{aligned}\right\} \text{Konsistenzordnung } p = 2$$

Alternative Herleitung:

-> Extrapolation

Euler-Schritt mit h: $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i)$

Euler-Doppelschritt mit $\frac{h}{2}$: $z = y_i + \frac{h}{2} \cdot f(t_i, y_i)$

$$\hat{y}_{i+1} = z + \frac{h}{2} \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, z\right)$$

$$2\cdot\hat{y}_{i+1} - y_{i+1} = \underbrace{2\cdot y_i + h\cdot f(t_i, y_i)}_{2\cdot z} + h\cdot f(t_i + \tfrac{h}{2}, z) - \underbrace{(y_i + h\cdot f(t, y_i))}_{y_{i+1}}$$

$$= y_i + h\cdot \underbrace{f(t_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{h}{2}\cdot \underbrace{f(t_i, y_i)}_{k_1})}_{k_2}$$

Trapezregel

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\,dt \approx \frac{h}{2}\left(f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))\right)$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \overbrace{\underbrace{y_{i+1}}_{\text{Implizites Verfahren}}}^{\text{Näherung berechnet mit Prädiktor } \tilde{y}_{i+1}})\right)$$

i) Lösung der in der Regel nicht linearen Gleichung (Newton-/ Fixpunkt-Iteration)

ii) Prädiktor - Korrektor - Kombination

$\uparrow$ explizites Verfahren $\qquad$ $\uparrow$ implizites Verfahren

z.B. Euler

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h\cdot f(t_i, y_i)$$

Einsetzen in Korrektor

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})\right)$$

Verfahren von Heun

Konsistenzordnung $p = 2$

The END