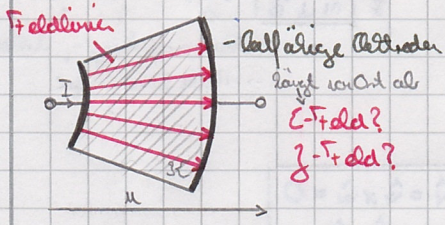


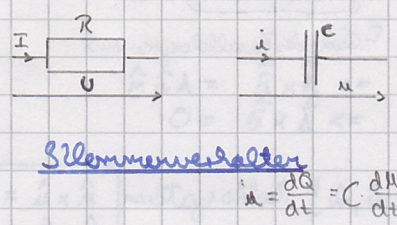
Parasit:

1

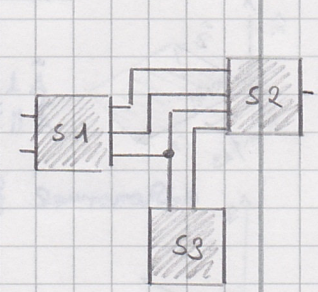


$\vec{E}(\vec{r}); \vec{J}(\vec{r})$   
 $\vec{D}(\vec{r})$  bei C  
 $H(\vec{r}), \vec{B}(\vec{r})$  bei L

Belastungsanalyse mit lokalen Größen



Stromenergieerhaltung  
 $u = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU}{dt}$   
 $U, I$        $Q$  bzw.  $q$



Systemerhaltung

jedes Subsystem analysieren  
 Interaktion? mit integralen Größen

2) Mathematische Hilfsmittel 5

2.2 Vektorechnung

$\vec{a}$  Darstellung

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$

$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$

$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$

oder  $\vec{a} = a_u \hat{u} + a_v \hat{v} + a_w \hat{w}$

$\vec{a} = a \hat{a}$  (Pfeil im Spitzfeld)

Betrag (Länge)      Einheitsvektor (Richtung)

$a = \|\vec{a}\| = \text{Euklidische Norm}$

$\|\hat{a}\| = |\hat{a}| = 1$

$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{\vec{a}}{a}$

graphische Präsentation (Skalierung definieren!)

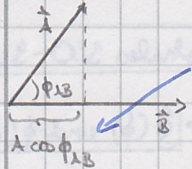
normale Basis! = Länge des EV = 1 und Basisvektoren sind EV und senkrecht zueinander

Operationen  $\vec{A}, \vec{B}$

$\vec{A} + \vec{B}, \vec{A} - \vec{B}, \vec{A} \cdot \vec{B}, \vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \parallel \vec{B}$

Skalarprodukt      Kreuzprodukt

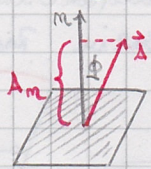
Skalarprodukt



$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos \phi_{AB}$  ← Ergebnis = Skalar

$A \cos \phi_{AB} = A \cdot \hat{B} = A \cdot \cos \phi_{AB} = A \cdot \cos \phi_{AB} = \vec{A} \cdot \hat{B}$  Projektion von  $\vec{A}$  auf die Richtung  $\vec{B}$

Projektion auf Normaleinheitsvektor:



$A_n = \hat{n} \cdot \vec{A} = A \cos \phi = \text{Normalkomponente } A_n$

≡ Projektion von  $\vec{A}$  auf die Richtung  $\hat{n}$

$\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

$\vec{A} \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B$  maximales Wert, das auftreten kann  $\hat{=} \max$

$\vec{A} \uparrow \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = -A \cdot B$   $\phi = 180^\circ$

$\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$  orthonormal  $\Rightarrow \hat{u} \cdot \hat{u} = \hat{v} \cdot \hat{v} = \hat{w} \cdot \hat{w} = 1$  &  $\hat{u} \cdot \hat{v} = \hat{u} \cdot \hat{w} = \hat{v} \cdot \hat{w} = 0$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_u \hat{u} + A_v \hat{v} + A_w \hat{w}) \cdot (B_u \hat{u} + B_v \hat{v} + B_w \hat{w}) = A_u B_u \hat{u} \cdot \hat{u} + A_u B_v \hat{u} \cdot \hat{v} + \dots$

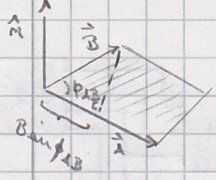
$\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = A_u \cdot B_u + A_v \cdot B_v + A_w \cdot B_w$  bei Orthonormalen 3D-System

Vektor

Skalarprodukt

$$\vec{A} \times \vec{B} = A \cdot B \cdot \sin \phi_{AB} \cdot \hat{n} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \\ \hat{n} \end{pmatrix} \Rightarrow \{\vec{A}, \vec{B}, \hat{n}\} = \text{Rechtsystem}$$



Fläche des Parallelogramms

$$\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = A \cdot B \cdot \hat{n}$$

$$\vec{A} \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = 0$$

Rechte-Hand-Regel

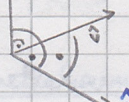
orthonormal  $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$  Rechtsystem

$$\hat{u} \times \hat{u} = \hat{v} \times \hat{v} = \hat{w} \times \hat{w} = 0$$

$$\hat{u} \times \hat{v} = \hat{w} = -\hat{v} \times \hat{u}$$

$$\hat{v} \times \hat{w} = \hat{u} = -\hat{w} \times \hat{v}$$

$$\hat{w} \times \hat{u} = \hat{v} = -\hat{u} \times \hat{w}$$



$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{u} (A_v B_w - A_w B_v) + \hat{v} (A_w B_u - A_u B_w) + \hat{w} (A_u B_v - A_v B_u)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{u} & \hat{v} & \hat{w} \\ A_u & A_v & A_w \\ B_u & B_v & B_w \end{vmatrix}$$

← Determinante wie Determinante

Dyadisches Produkt

$\vec{A} \vec{B} \rightarrow$  Ergebnis Tensor 2. Stufe *hier wird wieder Regel Distrib*

wichtig  $(\vec{a} \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c})$

Tensor  $\cdot$  Vektor = Vektor

↳ kann andere Gänge & Reihen haben wie  $\vec{g}$

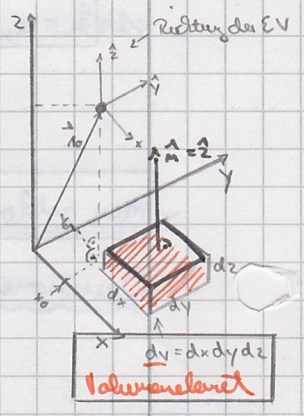
$$\vec{C} = [c] = \vec{A} \vec{B} = \sum_{\mu\nu} C_{\mu\nu} \hat{u}_\mu \hat{u}_\nu = \sum_{\mu\nu} C_{\mu\nu} \hat{u}_\mu \hat{u}_\nu + \dots + \sum_{\mu\nu} C_{\mu\nu} \hat{u}_\mu \hat{u}_\nu$$

$$\vec{C} \cdot \vec{g} = \vec{C} (g_\mu \hat{u}_\mu + g_\nu \hat{u}_\nu + g_w \hat{u}_w) = \dots = \hat{u} (C_{\mu\nu} g_\mu + C_{\nu\nu} g_\nu + C_{\mu w} g_w) + \hat{v} (C_{\nu\mu} g_\mu + C_{\nu\nu} g_\nu + C_{\nu w} g_w) + \hat{w} (C_{w\mu} g_\mu + C_{w\nu} g_\nu + C_{ww} g_w)$$

Tensor  $\cdot$  Vektor = Vektor

Skalarprodukt:  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A}^T \vec{B} = (A_u A_v A_w) \begin{pmatrix} B_u \\ B_v \\ B_w \end{pmatrix}$

Dyadisches Produkt:  $\vec{A} \vec{B} = \vec{A} \vec{B}^T = \begin{pmatrix} A_u \\ A_v \\ A_w \end{pmatrix} (B_u B_v B_w)$

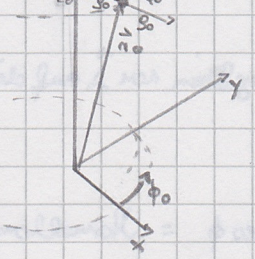


2.3 Sphärische Koordinaten

1) Sphärische Koordinaten  $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \Rightarrow A_x = \hat{x} \cdot \vec{A}$  usw.

$$\vec{a}_{xy} = \hat{z} dx dy \quad \text{Flächenelement} ; \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = x_0 \hat{x} + y_0 \hat{y} + z_0 \hat{z}$$

2) Kugelsphärenkoordinaten



$\hat{\phi}$  = Tangential zum Kreis

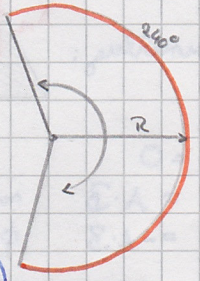
$\hat{\theta}$  und  $\hat{\phi}$  sind abhängig von Raumpunkt  $\rightarrow$  lokales 3D-System!

↳ ändern sich je nach Punkt (vom Ort abhängig)

Bogenlänge  $\hat{=}$  Winkel im Radius

↳  $\hat{g}(\phi)$  und  $\hat{\phi}(\phi)$

$$d\vec{r} = \hat{g} dz$$



$$b = 2\pi R \frac{3}{3} = \frac{4}{3} \pi R$$

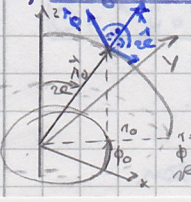
Winkel im Rad

Bild Seite 14.

$$dv = g dg d\phi dz$$

$$da = g dg d\phi$$

3) Plängelsphärenkoordinaten (sphärische Koordinaten)



$\vec{e}$  = Winkel also "Poldistanz" genannt

$$\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$$

alle von Ort abhängig ( $\rightarrow$  lokales 3D-System)

dadurch EV

$\rightarrow$  helfen beim Rechnen! keine Spaltenmatrix

$$dV = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\phi$$

$$dA = r^2 \sin \varphi dr d\phi$$

$$dV = dx dy dz = r dr d\varphi dz = r^2 \sin \varphi dr d\varphi dz$$

$$ndr$$

$$gd\phi = r \sin \varphi d\phi$$

524 Bsp. 2.5

$$\vec{E} = \frac{E}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } \vec{E} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \epsilon_0 (1,5\hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z})$$

Flussdichte  $\vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E} = \epsilon_0 \cdot \frac{E}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\epsilon_0 E}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow |\vec{D}| = \|\vec{D}\| = D = \epsilon_0 \cdot E \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{1,5^2 + 2^2 + 3^2}$$

$$= \frac{1,5 \cdot 2 \cdot 3}{3} \epsilon_0 \cdot E = 2,25 + 6 \epsilon_0 \cdot E$$

$$\cos \phi = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{D \cdot E} = \frac{\epsilon_0 \cdot \frac{E^2}{3} \cdot (1 \cdot 1,5 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3)}{E \cdot \epsilon_0 \cdot E \cdot 2,25 + 6} \approx 0,861 \Rightarrow \phi = \arccos(0,861) = 0,28025 \text{ rad} = 16,05^\circ$$

525 2.4 Differentiation

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Steigung der Tangente      Steigung der Sekante

$$df = f'(x) dx \quad \text{bzw. } \frac{\Delta f}{f(x) - f(x_0)} \approx \frac{f'(x)}{f(x_0)} \frac{\Delta x}{(x - x_0)} \Rightarrow f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow \text{erstes Element der Taylorreihe}$$

527 Partielle Ableitung

$$\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}$$

Bewegung in x-Richtung  $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx$

--- y-Richtung  $df = \frac{\partial f}{\partial y} dy$

--- z-Richtung  $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

beliebige Richtung      Totale Differential

$$df = \text{grad } f \cdot \vec{ds} \quad \text{mit } \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Änderung des Wertes  $f(x, y, z)$  bei Bewegung um das kleine Stück  $\vec{ds}$

$$\vec{ds} = \hat{e} ds \Rightarrow df = \text{grad } f \cdot \hat{e} ds \Rightarrow \frac{df}{ds} = \hat{e} \cdot \text{grad } f$$

$\hat{e} \cdot \text{grad } f$   $\hat{=}$  Ableitung / Steigung von  $f$  in die Richtung  $\hat{e} \hat{=}$  Richtungsableitung

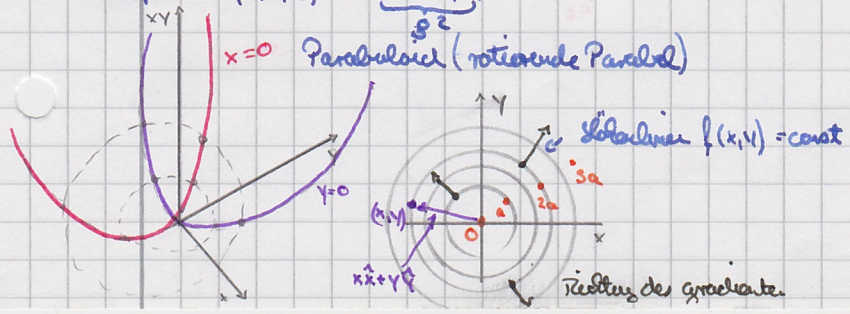
Bsp.:  $\hat{e} = \hat{x} \Rightarrow \frac{df}{ds} = \hat{x} \cdot \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}$

In welche Richtung  $\hat{e}$  wird  $\frac{df}{ds}$  maximal?  $\hat{a} \cdot \hat{b} \rightarrow \max \Rightarrow \hat{a} \parallel \hat{b} \Rightarrow \frac{df}{ds} = \max$  falls  $\hat{e} \parallel \text{grad } f$

**Definition**  $\text{grad } f \hat{=}$  Vektor in Richtung des steilsten Anstiegs von  $f(x, y, z)$

**Satz**  $\|\text{grad } f\| \hat{=}$  Ableitung in dieser Richtung

Bsp 2.7  $f(x, y) = a(x^2 + y^2)$



$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} = 2ax\hat{x} + 2ay\hat{y} = 2a(x\hat{x} + y\hat{y}) \text{ radial nach außen}$$

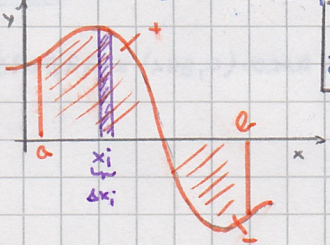
$f_{\text{rot}}(r, \phi) = a \cdot g^2 \Rightarrow \text{grad}(f_{\text{rot}}) = \hat{g} \frac{\partial f}{\partial g} + \hat{\phi} \frac{\partial f}{\partial \phi} = \hat{g} \cdot 2a \cdot g$  zeigt radial nach außen

Schreibweisen  $\vec{\nabla} \vec{a}, \vec{\nabla} \cdot \vec{a}, \vec{\nabla} \times \vec{a}, \rho_m dv$   
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} \rightarrow \vec{a} \rightarrow 0, \vec{b} \rightarrow 0$   
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{a}, \vec{\nabla} \cdot \vec{a}, \vec{\nabla} \cdot \vec{a}, \rho_m = \rho_m dv$

2.5 Integration  $I = \int \Delta$

$\int_a^b f(x) dx; \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s}; \vec{E} = \int \vec{j} \cdot d\vec{a}; \oint \vec{E} \cdot d\vec{a}; \iiint_V \rho_m dv; \iint_V \vec{E} \cdot \vec{j} dv$

Klassische Integration



$\int_a^b f(x) dx \approx \sum f(x_i) \Delta x_i$

$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum f(x_i) \Delta x_i$  mit  $x_i \in \Delta x_i$

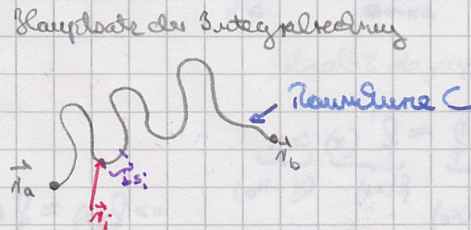
Integral  $\hat{=}$  Summe über unendlich viele Teilbeiträge

$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$  mit  $f(x) = \frac{dF}{dx} = F'(x)$

Wegpunkt

Integral  $\int_C f(\vec{r}) ds$

$\rho_c = \frac{dm}{ds} \hat{=} \frac{\text{Masse}}{\text{Länge}}$



Masse =  $\int_C \rho_c ds \hat{=} \sum \Delta m_c$

$\int_C f(\vec{r}) ds = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum f(\vec{r}_i) \Delta s_i$

speziell  $f(\vec{r}) = 1$ :  $\int_C ds = \int_C ds \hat{=} \Delta s_i = L_c$  (Bogenlänge)

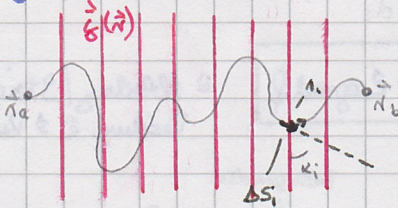
Bsp 2.11  $y = \frac{dQ}{dL} \rightarrow dQ = y dL \hat{=} y ds \rightarrow Q = \int_C y ds = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma_{\text{max}}}{2} (1 + \cos \phi) R \cdot d\phi$

$Q = \frac{\gamma_{\text{max}}}{2} 2\pi R = \pi \cdot R \cdot \gamma_{\text{max}}$

Integral  $\int_C \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$

wofür??  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \Delta W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$

hängt von Richtung des Weges



$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$

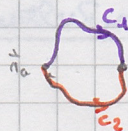
$\int_C \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum \vec{g}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{s}_i = \text{Linienvielglied}$

$\vec{g}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{s}_i = g_e ds_i \cos \alpha_i$

Spezialfall  $\vec{r}_a = \vec{r}_b$   $\vec{r}_a$   $\vec{r}_b$   $\vec{r}_c$   $\vec{r}_d$   $\vec{r}_e$   $\vec{r}_f$   $\vec{r}_g$   $\vec{r}_h$   $\vec{r}_i$   $\vec{r}_j$   $\vec{r}_k$   $\vec{r}_l$   $\vec{r}_m$   $\vec{r}_n$   $\vec{r}_o$   $\vec{r}_p$   $\vec{r}_q$   $\vec{r}_r$   $\vec{r}_s$   $\vec{r}_t$   $\vec{r}_u$   $\vec{r}_v$   $\vec{r}_w$   $\vec{r}_x$   $\vec{r}_y$   $\vec{r}_z$   $\vec{r}_a$   $\vec{r}_b$   $\vec{r}_c$   $\vec{r}_d$   $\vec{r}_e$   $\vec{r}_f$   $\vec{r}_g$   $\vec{r}_h$   $\vec{r}_i$   $\vec{r}_j$   $\vec{r}_k$   $\vec{r}_l$   $\vec{r}_m$   $\vec{r}_n$   $\vec{r}_o$   $\vec{r}_p$   $\vec{r}_q$   $\vec{r}_r$   $\vec{r}_s$   $\vec{r}_t$   $\vec{r}_u$   $\vec{r}_v$   $\vec{r}_w$   $\vec{r}_x$   $\vec{r}_y$   $\vec{r}_z$

" $\partial \Delta$ " bedeutet "Rand von  $\Delta$ "  $\rightarrow \oint \vec{g} \cdot d\vec{s} \hat{=} \text{Zirkulation}$  (= Linienintegral umschlossenes Feld)

$\oint \vec{g} \cdot d\vec{s} = 0 \rightarrow$  konservatives Feld  $\Delta$   $\leftarrow$  beliebig

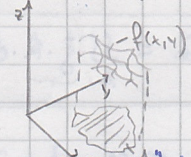


$\int_{C_1} \vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_{C_2} \vec{g} \cdot d\vec{s}$

27.03.14 786W Bsp. 2.12  $W_{12} = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot R \Rightarrow$  zugeführte Energie  $\int_{C_{12}} (-\vec{F}) \cdot d\vec{s} = -\int_{C_{12}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$

$= -\int_{C_{12}} (-mg\hat{y}) \cdot d\vec{s} = \int_{C_{12}} mg\hat{y} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} mg\hat{y} \cdot \hat{\phi} R d\phi = m \cdot g \int_0^{2\pi} \hat{y} \cdot \hat{\phi} d\phi = mgR [\sin\phi]_0^{2\pi} = \underline{m \cdot g \cdot R}$

939 Integral  $\iint_A f(x,y) \frac{dy dx}{da}$  oder  $\iint_A f(\rho, \phi) \frac{d\rho d\phi}{da}$  Bild Seite 39



$\iint_A f(\vec{r}) da = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \sum f(\vec{r}_i) \cdot \Delta a_i$   $\hat{=}$  Volumen eines durch x-y Ebene und der Fläche  $f(x,y)$  überdeckten Würfels  
 $\hat{=}$  Flächenintegral eines skalaren Fkt.  $f(\vec{r})$  über einer Fläche  $A$

$da = dx dy \Rightarrow \iint_A f(x,y) dx dy$  Stückerische 3D

$da = \rho d\rho d\phi \Rightarrow \iint_A f(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi$  Polar-3D  $\rightarrow [d\vec{a} = \rho d\rho d\phi \hat{z}] \hat{=}$  Flächenelement auf Kreis/xy Ebene

Sphärisch:  $f(\vec{r}) = 1: \iint_A da = A$   $[d\vec{a} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r}]$  Flächenelement auf Kugeloberfläche

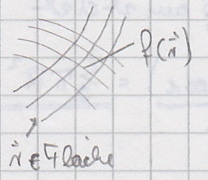
941 Bsp. 2.13  $A = \iint da = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho d\rho d\phi = \int_0^{2\pi} [\frac{1}{2} \rho^2]_0^R d\phi = \frac{1}{2} R^2 \int_0^{2\pi} d\phi = \underline{\pi R^2}$

Bsp. 2.15  $\vec{\sigma} = \frac{Q}{A}$  mit  $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^2}{2}$   
 $Q = \iint_A \sigma da = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{2}{3} \sigma_{max} (1 + \frac{xy}{a^2}) dy dx = \frac{2}{3} \sigma_{max} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [y + \frac{x}{a^2} \frac{y^2}{2}]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx$   
 $= \frac{2\sigma_{max}}{3a^2} \int_0^a [\frac{x}{2} + \frac{x^3}{8a^2} - (-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{8a^2})] dx = \frac{2}{3} \sigma_{max} \int_0^a x dx = \frac{2}{3} \sigma_{max} \frac{1}{2} a^2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \vec{\sigma} = \frac{Q}{A} = \underline{\frac{2}{3} \sigma_{max}}$

01.04.2014 W1  $grad f \cdot d\vec{s} = df \rightarrow \frac{df}{ds} = \hat{e} \cdot grad f$  Rechnungsableitung

$\int_C \hat{e} \cdot d\vec{s} \hat{=}$  Linienintegral  $\Rightarrow \oint \hat{e} \cdot d\vec{s} \hat{=}$  Divergenz des Vektorfeldes  $\hat{=}$  Umfang  $\hat{=}$  gesamtes einer Ebene

Integration einer skalaren Funktion über gekrümmte Fläche

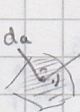


$\iint_A f(\vec{r}) da$   $\leftarrow$  auf kugelförmiger Kugeloberfläche  $da = \rho d\rho d\phi$   
 $da = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$  falls auf Kugeloberfläche

944 Bsp. 2.17  $A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^2 \sin\theta d\theta d\phi = R^2 \int_0^{2\pi} [-\cos\theta]_0^{\pi/2} d\phi = 2\pi R^2 (-(-1) + 1) = \underline{2\pi R^2}$

Bsp. 2.18  $[\sigma] = \frac{As}{m^2} = \frac{C}{m^2} \Rightarrow Q = \sum \sigma da \rightarrow \iint \sigma da$   
 $Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sigma_{max} \sin\theta \frac{1 + \cos^2(\theta/2)}{2} R^2 \sin\theta d\theta d\phi$

### Integral einer Vektorfunktion $\vec{g}(\vec{r})$ über gekrümmte Fläche

$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{a}$  oder  $\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{a}$    $|\vec{d}\vec{a}| = |\hat{n}| da$  verteiltes Flächenelement  
 $\int_V \vec{j} \cdot d\vec{a}$   $\uparrow$  Normaleinheitsvektor

$$\int_A \vec{g} \cdot d\vec{a} = \int_A \underbrace{\vec{g} \cdot \hat{n}}_j \cdot da = \int_A g_n da$$


↓ Spezialfall:  $A = \partial V$  Rand des Volumens  $V \hat{=} K$  Kugelfläche

$$\oint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{a} \hat{=} \text{Küllensintegral (meistens Kullfluss)}; d\vec{a} = \hat{n} da \text{ mit } \hat{n} \text{ aus } V \text{ heraus}$$

### Beip. 2.19

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \int_{A_1} \vec{j} \cdot d\vec{a} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v_z(\rho) \cdot \underbrace{\hat{z} \cdot \hat{z}}_1 \rho d\rho d\phi = 2\pi v_0 \int_0^R \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right) \rho d\rho = 2\pi v_0 \left[ \frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{2R^2} \cdot \frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^R \\
 &= 2\pi v_0 \left( \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{8} R^2 \right) = \frac{3}{4} \pi R^2 v_0 = \underbrace{\pi R^2}_{\text{Kreisfläche}} \cdot \frac{3}{4} v_0 \\
 G_2 &= \int_{A_2} \vec{j} \cdot d\vec{a} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v_z(\rho) \cdot \underbrace{\hat{z} \cdot \hat{n}}_{\cos \vartheta} \cdot R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\phi = 2\pi v_0 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R \sin \vartheta}{R}\right)^2\right) \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \\
 &= 2\pi v_0 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \sin \vartheta \cos \vartheta - \frac{1}{2} \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \right) d\vartheta = 2\pi v_0 R^2 \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta - \frac{1}{8} \sin^4 \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{3}{4} \pi R^2 v_0 = G_1
 \end{aligned}$$

### Volumenintegral über skalare Fkt

z.B.   $\rightarrow$  Gesamtmasse:  $m = \int_V \rho(\vec{r}_i) dv_i \rightarrow m = \int_V \rho dv$   
 $dv_i \rightarrow 0$   
 z.B.  $\rho$  Dichtefunktion  $\rho(\vec{r})$  z.B.

$$\int_V \rho(\vec{r}) dv \text{ z.B. } \rho \hat{=} m \hat{=} \text{Raumladungsdichte (in } \frac{C}{m^3})$$

$$\int_V dv = V$$

$$\hookrightarrow \int_V m dv \hat{=} \text{Gesamtmasse}$$

### Beip. 2.22

$$\begin{aligned}
 \text{Volumen } V &= \int_V dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\phi = 2\pi \int_0^R r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta d\vartheta \\
 &= 2\pi \frac{1}{3} R^3 [-\cos \vartheta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \pi R^3 (1 - \cos \frac{\pi}{2}) = \frac{2}{3} \pi R^3 \cdot R \frac{(1 - \cos \frac{\pi}{2})}{R} = \frac{2}{3} \pi R^3
 \end{aligned}$$

### Beip. 2.23

$g_m(\vec{r}) = g_{\max} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \vartheta\right)$  maximal für  $r=0$  bzw.  $\vartheta=0 \Rightarrow$  auf der z-Achse  
 minimal für  $r=R$  bzw.  $\vartheta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow$  "auf Äquator"

$$\begin{aligned}
 \rightarrow g_{\min} &= g_{\max} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{R^2} \sin^2 90^\circ\right) = \frac{1}{2} g_{\max} \\
 m &= \int_V g_m dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R g_{\max} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \vartheta\right) r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\phi = 2\pi g_{\max} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^R r^2 - \frac{1}{2} \frac{r^4}{R^2} \sin^2 \vartheta \right] d\vartheta \\
 &= 2\pi g_{\max} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{3} \sin \vartheta - \frac{1}{8} \frac{\sin^3 \vartheta}{R^2} \right) d\vartheta = 2\pi g_{\max} R^3 \left[ \frac{1}{3} \sin \vartheta - \frac{1}{8} \frac{\sin^4 \vartheta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} \pi R^3 g_{\max} \left(1 - \frac{3}{8}\right)
 \end{aligned}$$

Vektor-differentialoperatoren (grad, div, rot)

$f(x) = \int \frac{df}{dx} dx = \int f'(x) dx \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx \text{ mit } f(x) = \frac{dF}{dx} = F'(x)$   
 $f(x) = \int \{f''(x) dx\} dx$

① Integrationsordnung erlösen  $\rightarrow$  geeignet gewählte Ableitung nötig

**Liniintegral**  $\oint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{a}$   $\rightarrow$   $\iiint_V \text{div } \vec{g} \, dV$   
 (Skalar)  $\rightarrow$   $\text{Stokes}$   $\rightarrow$  ist geeignet zu wählen  
 $\leftarrow$  **Einheitsgesetz**  
 $\partial V = \text{Rand} \rightarrow = \text{Oberfläche}$   
 Skalar, abhängig von  $(\vec{r})$

$\Rightarrow$  kleine  $V (V \rightarrow 0) \Rightarrow \oint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{a} \approx \text{div } \vec{g} \cdot V$   
 $\rightarrow \text{div}(\vec{g}) = \text{div } \vec{g} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{a}$  diff. d. Divergenz

$\oint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{a} \hat{=} \text{Quellenstärke im Volumen}$   
 $> 0 \rightarrow \text{Quelle in } V; < 0 \rightarrow \text{Senke in } V$

$\rightarrow$  Quellenstärke pro Volumen  $\iiint \text{div } \vec{g} \, dV$

**Divergenz**  $\hat{=} \text{Quellenstärke (in } V) \text{ bezogen auf Volumen } V \hat{=} \text{Quellenstärke}$  am Ort  $\vec{r}$  mit  $\lim_{V \rightarrow 0}$

Berechnungsverfahren in kartesischen Koordinaten  $\leftarrow V$ -Quader  $\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0$   
 $\text{Skalar } \partial V$

$\oint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{a} = g_z(x_m, y_m, z_0 + \Delta z) \Delta x \Delta y - g_z(x_m, y_m, z_0) \Delta x \Delta y + g_x(x_0 + \Delta x, y_m, z_m) \Delta y \Delta z - \dots$   
 $\frac{1}{V} \oint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{a} = \frac{g_z(x_m, y_m, z_0 + \Delta z) - g_z(x_m, y_m, z_0)}{\Delta z} + \dots$   
 $\uparrow$   
 $\Delta x \Delta y \Delta z$

$\rightarrow \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{a} = \frac{\partial g_z}{\partial z} \Big|_{x_m, y_m, z_0} + \frac{\partial g_x}{\partial x} \Big|_{y_m, z_m, x_0} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \Big|_{x_m, y_0, z_m}$

$\text{div}(\vec{g}(x, y, z)) = \text{div } \vec{g} \Big|_{(x, y, z)} = \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}$

$\text{div } \vec{g} \Big|_{(x, y, z)} = \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} \Big|_{(x, y, z)}$   
 Skalar

**Divergenz in kartesischen Koordinaten**  
 $\hat{=} \text{Quellenstärke pro Volumen}$

$\hookrightarrow$  in kartesischen Koordinaten andere 3D-Systeme in Skalarwertform

$\text{div } \vec{g}$  / **kugelsymmetrisch** siehe Aufgabensammlung

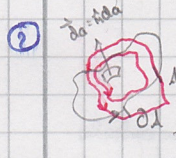
$\text{div } \vec{g}$  / **Zylinderkoordinaten**  $\Rightarrow$  Beispiel 2.24

Wählen des Randes

Integrieren über Fläche

**Satz von Stokes**  
 $\oint_{\partial A} \vec{g} \cdot d\vec{a} = \iint_A \text{rot } \vec{g} \cdot d\vec{a}$   
 $\hat{=} \text{Wirbelstärke auf } A \text{ (Vektorfläche)} = \oint_{\partial A} \vec{g} \cdot d\vec{s}$   
 $\hat{=} \text{Wirbelstärke / Fläche}$

$\hat{=} \text{Wirbelstärke}$   
 $\hat{=} \text{Wirbelstärke auf } A \text{ (Vektorfläche)} = \oint_{\partial A} \vec{g} \cdot d\vec{s}$

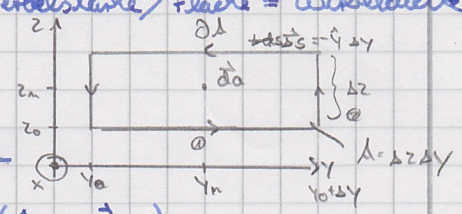


$\Rightarrow$  kleine  $A \Rightarrow \oint_{\partial A} \vec{g} \cdot d\vec{a} \approx \text{rot } \vec{g} \cdot \vec{n} \cdot A$

$\Rightarrow \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{g} = (\text{rot } \vec{g})_n = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_{\partial A} \vec{g} \cdot d\vec{s}$   $\leftarrow$  2-Komponente z. B.  $x, y, z$

**Wirbelstärke / Fläche**  $\hat{=} \text{Wirbelstärke} = \text{Rotation (auf Rand)}$

$(\text{rot } \vec{g})_x = \hat{x} \cdot \text{rot } \vec{g} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_{\partial A} \vec{g} \cdot d\vec{s}$   
 $\uparrow$   
 $A$  parallel zur  $yz$ -Ebene



z.B.  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = 0$  im Statik  $\hat{=} \text{Maxwell-Gleichung} \rightarrow \text{Wirbelfreies Feld} (\hat{=} \text{rot } \vec{E} = 0)$

$$\oint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{s} = g_y(x_0, y_0, z_0) \Delta y + g_z(x_0, y_0, z_0) \Delta z - g_y(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) \Delta y - g_z(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) \Delta x$$

$$\frac{1}{\Delta} \oint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{s} = \frac{g_z(x_0, y_0, z_0) - g_z(x_0, y_0, z_0 + \Delta z)}{\Delta z} - \frac{g_y(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - g_y(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}$$

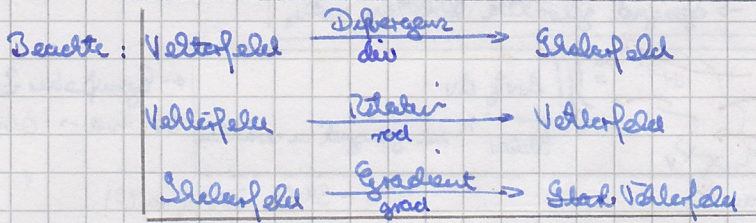
$$\downarrow \Delta y \rightarrow 0$$

$$\downarrow \Delta z \rightarrow 0$$

$$\left( \text{rot } \vec{g} \right)_x \Big|_{(x, y, z)} = \frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} \Big|_{(x, y, z)}$$

! Rotieren ist ein Vektorielles Ergebnis

$$\text{rot } \vec{g} = \hat{x} \left( \frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left( \frac{\partial g_x}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left( \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \right)$$



### §61 Gradient und Linienintegral

$$df = \text{grad } f \cdot d\vec{s}$$

$$\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \text{grad } f \cdot d\vec{s} = \sum \Delta f_i = f(\vec{r}_b) - f(\vec{r}_a)$$

$f(\vec{r})$  ist bekannt

$$f(\vec{r}_b) = f(\vec{r}_a) + \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \text{grad}(f) \cdot d\vec{s} \rightarrow \text{unabhängig von Weg (Gebirge + Höhe)}$$

$$\oint \text{grad } f \cdot d\vec{s} = 0 \rightarrow \text{grad } f \text{ ist wirbelfrei}$$

$\Delta \rightarrow$  geschlossener Verlauf  $\rightarrow$  Differenzpunkt = Endpunkt

$$\text{grad } f = \hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z}$$

### §62 Skalarprodukt für grad, div und rot

$$\vec{\nabla} \hat{=} \nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \hat{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Nabla-Operator  $\rightarrow \text{grad}(f) = \vec{\nabla} f = \nabla f$

$$\text{div}(\vec{g}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = \nabla \cdot \vec{g} \rightarrow \text{Skalarprodukt}$$

$$\text{rot}(\vec{g}) = \vec{\nabla} \times \vec{g} = \nabla \times \vec{g} \hat{=} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix}$$

$$\text{rot}(\vec{g}) = \vec{\nabla} \times \vec{g} = \nabla \times \vec{g}$$

### Skalarprodukt Operationen

$$\text{grad}(\text{div } \vec{g}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{g})$$

$$\text{div}(\text{grad } f) = \nabla \cdot (\nabla f)$$

$$\text{div}(\text{rot } \vec{g}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{g}) \hat{=} 0 \leftarrow \text{rot}(\vec{g}) = \nabla \times \vec{g} \text{ ist quellenfrei}$$

$$\text{rot}(\text{grad } f) = \nabla \times (\nabla f) \hat{=} 0 \leftarrow \text{grad}(f) = \nabla f \text{ ist wirbelfrei}$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{g}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{g})$$

Wirbelfrei  $\text{rot } \vec{g} \hat{=} 0 \rightarrow$  es existiert  $f(\vec{r})$  mit  $\vec{g} = \text{grad } f$

Skalarpotential

Lösung unter bestimmten Umständen

Quellenfrei  $\text{div } \vec{g} \hat{=} 0 \rightarrow$  es existiert  $\vec{h}(\vec{r})$  mit  $\vec{g} = \text{rot } \vec{h}$

Vektorpotential



Elektrostatik (E-Statik) ← Quellenfeld

$\vec{E}(\vec{r}, t) \leftarrow$  Quellen- und Wirbelfeld

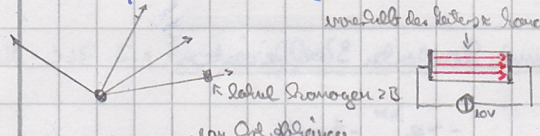
siehe später

Magnetostatik ← Wirbelfeld

Bsp. 2.26  $\vec{g}(\vec{r}) = \vec{g}(x, y, z) = 2\hat{x} + 3\hat{y} + \hat{z}$

Quellenfrei  $\rightarrow \text{div } \vec{g} \equiv 0 \rightarrow \text{div } \vec{g} = \frac{\partial 2}{\partial x} + \frac{\partial 3}{\partial y} + \frac{\partial 1}{\partial z} = 0 \checkmark \Rightarrow$  Feld ist Quellenfrei

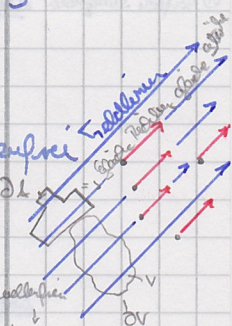
Wirbelfrei  $\rightarrow \text{rot } \vec{g} = \hat{x} \cdot 0 + \hat{y} \cdot 0 + \hat{z} \cdot 0 = \vec{0} = 0 \Rightarrow$  Feld ist wirbelfrei



$\oint_{\partial \Delta} \vec{g} \cdot d\vec{s} = 0$  für alle  $\partial \Delta$

$\Rightarrow$  homogenes Feld

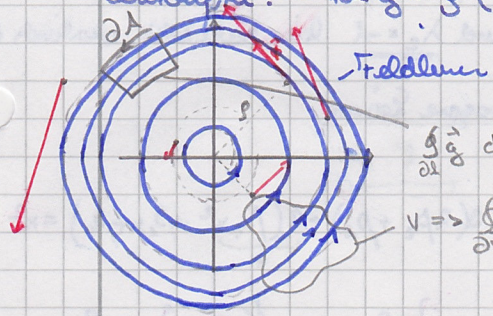
$\Rightarrow \oint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{a} = 0$  für alle  $\partial V$



Bsp. 2.27  $\vec{g}(\vec{r}) = (p, \phi, z) = \rho \hat{\phi}$

Quellenfrei  $\rightarrow \text{div } \vec{g} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \frac{d\rho}{d\rho}) = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\rho} = 0 \rightarrow$  Quellenfrei

Wirbelfrei?  $\rightarrow \text{rot } \vec{g} = \hat{\phi} (-\frac{d\rho}{dz}) + \hat{z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{d\rho}{d\rho}) = \hat{\phi} \cdot 0 + \hat{z} \frac{1}{\rho} \cdot 2\rho = \hat{z} \cdot 2 \rightarrow$  wirbelbehaftet



$\oint_{\partial \Delta} \vec{g} \cdot d\vec{s} \neq 0$

$\forall \Rightarrow \oint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{a} = 0$  für alle  $\partial V =$  Quellenfrei

567  $\text{div}(\text{grad } f) = ??$

Laplace Operator

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \Delta f$$

568  $\text{rot}(\text{rot } \vec{g})$  und  $\text{grad}(\text{div } \vec{g}) = ?$

$\text{rot}(\text{rot } \vec{g}) = \text{grad}(\text{div } \vec{g}) - \Delta \vec{g}$

siehe (a) alle-compassen

$\nabla \times (\nabla \times \vec{g}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{g}) - \Delta \vec{g}$

Bsp. 2.29  $\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) = \text{div}(\text{grad } f) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{\rho} \frac{d f}{d \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)$   
 $= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{d f}{d \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$  q.e.d

Bsp. 2.31  $f(\vec{r}) = f(x, y, z) = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  oder z.B.  $f(\vec{r}) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f(x, y, z)$

569  $\text{grad}(r) = \hat{r} \frac{\partial r}{\partial r} + \hat{\phi} \cdot 0 + \hat{z} \cdot 0 = \hat{r}$   
 Sphärkoordinaten  
 Sphärkoordinaten

$\text{grad}(r) = \text{grad} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \hat{x} \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \dots = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$   
 kartesisch

$\text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = \hat{r} \frac{\partial (1/r)}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \hat{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2}$

$\text{grad} \frac{1}{r} = \text{grad} \frac{1}{|\vec{r}|} \Rightarrow \text{grad} \frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

Nachführung des ganzen Vektorfeldes  
 siehe Bsp. 2.33 und Feld einer Punktladung

2.7 Lösung von (partiellen) Differentialgleichungen

1.1. Integration  
 2.3.34  $f(x)$  gesucht  $\rightarrow \frac{d}{dx} \left[ (x+1) \frac{df}{dx} \right] = 4 \Rightarrow (x+1) \frac{df}{dx} = 4x + C_1$   
 $\Rightarrow \frac{df}{dx} = 4 \cdot \frac{x}{x+1} + \frac{C_1}{x+1} \xrightarrow{\text{2. Integration}} f(x) = 4x + (C_1 - 4) \ln|x+1| + C_2$

$f(0) = 5 = C_2$   $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=1} = 3 = 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{C_1}{2} \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow \underline{f(x) = 4x - 2 \ln|x+1| + 5}$   
 für  $0 \leq x \leq 1$

2.36  $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = x^2$  lineare DGL mit konstanten Koeffizienten z.B. RLC-Netzwerk

$f(x) = f_p(x) + f_h(x) \rightarrow e^{\lambda x}$ -Ansatz  
 partikuläre Lösung erfüllt DGL für  $x^2$       homogene Lösung erfüllt DGL für rechte Seite = 0

homogene Lösung:  $\lambda^2 e^{\lambda x} + 3\lambda e^{\lambda x} + 2e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 = \text{Charakteristische Gl.}$   
 $\lambda_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} \Rightarrow \lambda_1 = -2$  und  $\lambda_2 = -1$  hier zwei reelle, verschiedene Eigenwerte

$\Rightarrow f_h(x) = A_1 e^{-2x} + A_2 e^{-x}$  = allgemeine homogene Lösung  
 $A_1, A_2$  aus Randbedingungen

partikuläre Lösung  $\Rightarrow f_p(x) = \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0 = 2\beta_2 + 2(2\beta_2 + \beta_1) + 2(\beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0) = x^2$   
 $\rightarrow \beta_2 = \frac{1}{2}$        $\rightarrow 1 + 3\beta_1 + 2\beta_0 = 0$        $\beta_0 = \frac{3}{4}$   
 $3 + 2\beta_1 = 0 \rightarrow \beta_1 = -\frac{3}{2}$  }  $f_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} + A_1 e^{-2x} + A_2 e^{-x}$  = allgemeine Lösung  
 $A_1, A_2$  aus Randbedingungen

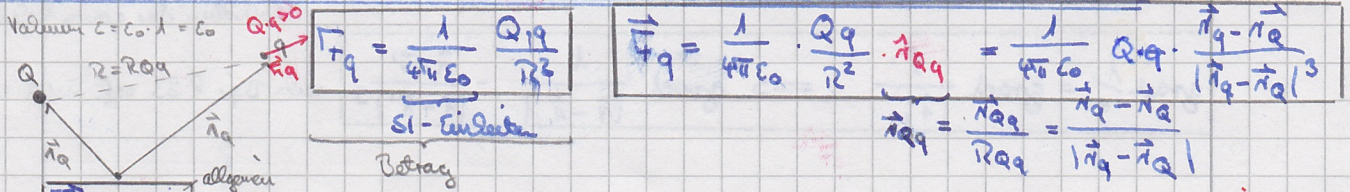
$f(0) = 0 \rightarrow \frac{3}{4} + A_1 + A_2 = 0 \rightarrow A_1 = \frac{-\frac{3}{4}e^{-2} - A_2}{e^{-2} - 2e^{-4}}$   
 $f'(0) = 0 \rightarrow 2 - \frac{3}{2} - 2A_1 e^{-4} - A_2 e^{-2} = 0$

Separationsansatz

$\Delta f = 0 \xrightarrow{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow f(x) = Ax + B$   
 $\Delta f = 0 \xrightarrow{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0} \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial g} \left( g \frac{df}{dg} \right) = 0 \Rightarrow g \frac{df}{dg} = C_1 \Rightarrow \frac{df}{dg} = \frac{C_1}{g} \Rightarrow f(g) = C_1 \ln g + C_2$   
 $\Delta f = 0 \xrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{df}{dr} \right) = 0 \Rightarrow f(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$

Das elektrostatische Feld (Elektrostatik)

Gesetze in Vektorform

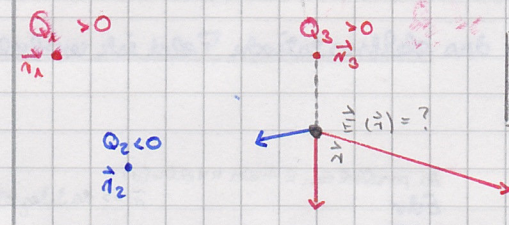


$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_q(\vec{r})}{q}$

$\frac{\vec{F}_q}{q} = \vec{E}$  el. Feldstärke  $\hat{=}$  Kraft auf Probeladung / Probeladung  $\leftarrow$  Def gilt allgemein

$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{n} - \vec{n}_q}{|\vec{n} - \vec{n}_q|^3}$  el. Feld einer Punktladung Q  $\leftarrow$  spezielle Punktladung  
 $[\vec{E}] = \frac{V}{m} = \frac{N}{As} = \frac{g/m}{As} = \frac{Vm}{As} = \frac{V}{m}$

Statik: "E-Feld von  $\oplus$  nach  $\ominus$ "



$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Superposition

3.5 Die elektrische Flussdichte  $\vec{D}$  in  $\frac{As}{m^2}$

$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$  falls linear & isotrop  
falls das Medium linear und isotrop (Richtungsunabhängig)

$\epsilon_r \geq 1 \rightarrow |\vec{E}_{\text{Material}}| < |\vec{E}_{\text{Vakuum}}|$  für gegebene Ladungen

$\vec{D} \propto \vec{E} \Rightarrow$  nicht linear (z. Stoff)  $\vec{D} \not\propto \vec{E} \Rightarrow$  anisotrop (z. Stoff)  $\leftarrow$  Vorzugsrichtung (z. B. Kristalle)

ohne Materie  $\Rightarrow \vec{E}_Q = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0}$  (stellt sich im Vakuum ein)

mit Materie  $\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_a + \vec{E}_i = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$  - Polarisation

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}(\vec{E})$$

allgemein  
Polaris. aller Darm-Ellipsoide  
 $\rightarrow$  keine Richtung mehr möglich

$\vec{P}$  bel. Richtung  $\rightarrow$  anisotrop ( $\vec{D} \not\propto \vec{E}$ )  
 $\rightarrow$  ggf. nichtlinear

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \vec{\chi} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}$$

falls linear aber z. B. anisotrop  $\vec{P} = \epsilon_0 \vec{\chi} \cdot \vec{E}$

falls Wechselfelder bzw. zeitabh. Felder

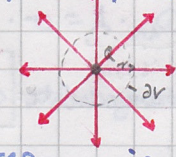
$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_0 \vec{\epsilon}_v(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t - \tau) d\tau$$

komplex  $\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \vec{\epsilon}_v(\vec{r}, \omega) \cdot \vec{E}(\vec{r}, \omega)$  im  $\vec{r}$ -Frequenzbereich für Materie mit Gedächtnis (dispersive Materie)

Bsp.: Wasser:  $\epsilon_r (f < 1 \text{ kHz}) \approx 80$ ;  $\epsilon_r (f \approx 200 \text{ GHz}) \approx 5$ ;  $\epsilon_r (\text{Gleit}) \approx 2$

Quadrupolmoment

$$\vec{D} \stackrel{!}{=} \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \vec{n}$$



$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot 4\pi r^2$$

3.6 Das Gaußsche Satz der Elektrostatik

Satz vom Quellenfluss  $\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_v \hat{=} \text{Ladung im Volumen } V$

Bsp. 33:  $V \hat{=} \text{Kugel mit Radius } r \rightarrow \vec{D} \perp \partial V \Rightarrow \vec{D} \parallel d\vec{a} \Rightarrow \vec{D} \cdot d\vec{a} = D da$  und  $D = \text{const auf } \partial V$

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{a} = \oint_{\partial V} D da = D \oint_{\partial V} da = D \cdot A = D \cdot 4\pi r^2 = Q$$

Flussdichte

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \vec{n}$$

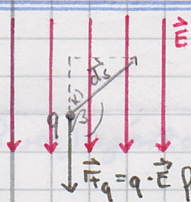
$\rightarrow$  konstant auf Kugeloberfläche

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{D}(\vec{r})}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{n}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\epsilon} \text{ in Stoff} \\ 1 \text{ in Luft} \end{array} \right.$

$\rightarrow$  maximaler Wert (Oberfläche) der Bleimotorschlacke

3.7 Elektrostatistisches Potential  $\varphi$  und Spannung  $U$



$dW_q \hat{=} \text{Änderung der pot. Energie} \rightarrow$  nur Beträge  $dW_q = \vec{F}_q \cdot d\vec{s} \cos \alpha = F_q ds \cos(\pi - \beta)$   
 $\Rightarrow dW_q = -\vec{F}_q \cdot d\vec{s} = -F_q ds \cos(\beta)$

Def.: Potential

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{W_q(\vec{r})}{q} \text{ in } \frac{Vs}{C} = \frac{Vs}{As} = V \rightarrow d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

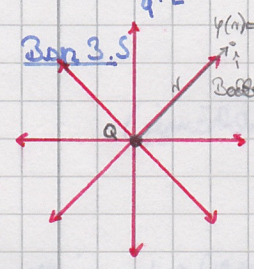
$$\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_B) = \int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}} d\varphi = -\int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_B) - \int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\varphi(\vec{r}_2) = \varphi(\vec{r}_1) - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \rightarrow \text{Spannung } U_{12}: U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

d.h.  $dU = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$

$\oint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = 0$  entspricht Laplacewatz  $\Rightarrow$  hier: das elektrostatische Feld ist verdrängsfrei

$\oint \vec{F}_q \cdot d\vec{s} = 0 \rightarrow \hat{=} \text{Energieerhaltung}$



$U_{\text{pot}} = \varphi(r) - \varphi(\infty) = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_r^\infty = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

da parallel zum E-Feld  $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$   
 $\vec{r} \Rightarrow$  da Integrationsgrenze  $r \rightarrow$  verbleibt

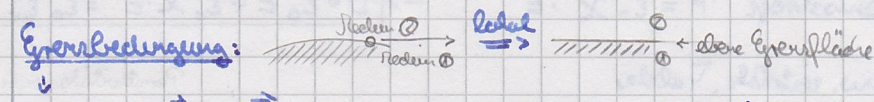
$\hookrightarrow$  falls Ladung  $Q$  bei  $\vec{r}_Q$  und in lin. isotropen Medium mit  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r |\vec{r} - \vec{r}_Q|}$

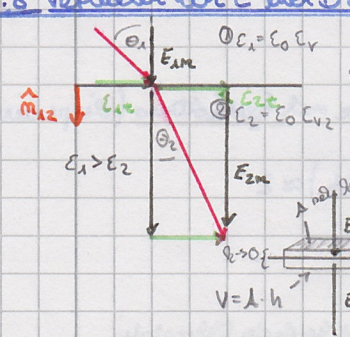
$\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_v$   
 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{c} = 0$

mit  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$  Grundgesetze des Elektrostatisches  
 falls linear und  $\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$  falls auch isotrop  
 2 div & Stromeq. (bei Statik)

$d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$  falls  $\vec{E} \perp d\vec{s} \Rightarrow$  Äquipotentiallinien



3.8 Verhalten von  $\vec{E}$  und  $\vec{D}$  an den ebenen Grenzflächen zweier Medien



$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_{2z} l - E_{1z} l = 0$  Spannungen müssen gleich sein

$\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = D_{2n} A - D_{1n} A = \sigma \cdot A \hat{=} Q_v \rightarrow D_{2n} = D_{1n} + \sigma$

$\sigma = \frac{dQ}{da}$  im  $\frac{C}{m^2}$

$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$  Stetigkeit des tang. d. Feldes

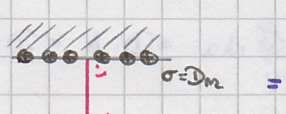
$D_{2n} = D_{1n}$  falls  $\sigma = 0$

$\hat{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \text{Rot } \vec{E} = 0$  Sprungrotation

$\hat{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \text{Div } \vec{D} = \sigma$  Sprungdivergenz

$\sigma \neq 0$  nur an metallischen Oberflächen

Spezialfall: ①  $\hat{=} \text{Metall}$



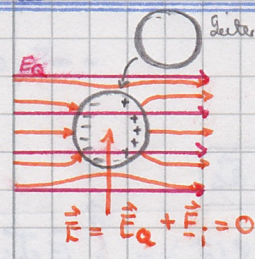
$E_{2z} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \text{Metall}$   
 $D_{2n} = \sigma$  Flächenladungsdichte auf Metalloberfläche

②  $\hat{=} \text{diel., Material}$

① & ② nicht Metall  $\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{E_{2t}/E_{2n}}{E_{1t}/E_{1n}} = \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{D_{1n}/\epsilon_1}{D_{2n}/\epsilon_2} = \frac{D_{1n}/\epsilon_1}{D_{1n}/\epsilon_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$

$\rightarrow \frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$  falls  $\sigma = 0$  & linear & isotrop

3.9 Leiter im el. Feld (Einfluss, Abschirmung)



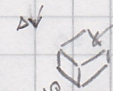
Einfluss:


- Verdrängung frei beweglicher Ladungsträger (im Leiter)
- Verzerrung des äußeren Feldes
- Verschiebung bis  $\vec{F}_q = q \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$  innerhalb des Leiters
- Ladungen auf Leiteroberfläche

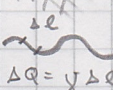
3.10 Spure von Feldbildern im Elektrostatisches Siehe Skizzen S.115

Übergang auf kontinuierliche Ladungsverteilung Rechenregeln + Elektrostatik

kleine elementarladungen einzeln betrachten

$\Delta V$    $\Delta Q = \rho \Delta V \rightarrow \rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$  in  $\frac{C}{m^3}$  Volumenladungsdichte " $\rho = \frac{dQ}{dV}$ " versucht das für mich oder klein machen

  $\Delta Q = \sigma \Delta a \Rightarrow \sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta a}$  in  $\frac{C}{m^2}$  Flächenladungsdichte " $\sigma = \frac{dQ}{dA}$ "

  $\Delta Q = \gamma \Delta l \Rightarrow \gamma = \frac{\Delta Q}{\Delta l}$  in  $\frac{C}{m}$  Linienladungsdichte

$Q_V = \int \rho dV + \iint \sigma da + \int \gamma dl \Rightarrow$  Gaußscher Satz:  $\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = \iiint_V \rho dV$

mur dieser Term explizit geschrieben i' - Ort des Beobachters, i = Beobachtungspunkt

wie aus Gaußscher Satz auf Punktladung?

$\Rightarrow Q_i \rightarrow \rho(x', y', z') = Q_i \delta(x' - x_i) \delta(y' - y_i) \delta(z' - z_i)$

$\iiint \rho dV' = \iiint Q_i \delta(x' - x_i) \delta(y' - y_i) \delta(z' - z_i) dx' dy' dz' = Q_i$  mit  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$

15.04.2014 Grundgesetze der E-Statik

$\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_V$   
 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$

lineare Fall  
 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$   
 $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}$

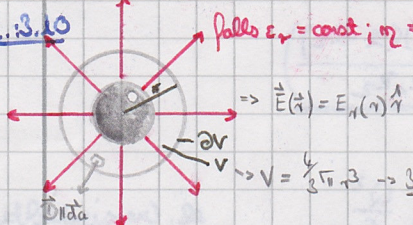
linear + isotrop

$E_{21} = E_{12}$

$\rightarrow$  Grenzbedingung:  $D_{2n} = D_{1n} + \sigma$  mit  $\sigma = \frac{dQ}{dA}$  in  $\frac{C}{m^2}$

$\rho = \frac{dQ}{dV}$  ;  $\sigma = \frac{dQ}{dA}$  ;  $\gamma = \frac{dQ}{dl} = \frac{dQ}{ds} \rightarrow Q_V = \iiint \rho dV \rightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = \iiint \rho dV = Q_V$

Beip. 3.10



Falls  $\epsilon_r = const$ ;  $\rho = 0$   $\vec{E}(\vec{r}) = ??? \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = 0$  für  $r < R$

Satz von Gauß:  $\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_V$  mit  $\vec{D} \parallel d\vec{a} \rightarrow \vec{D} \cdot d\vec{a} = D da$

$D = const$  auf  $\partial V \Rightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = \oint D da = D \oint da = D \cdot 4\pi r^2 = Q_V = Q = \iiint \rho dV = Q + \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'$

$E_r(r) = \frac{D_r(r)}{\epsilon_0 \epsilon_r(r)} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r(r) r^2} \left[ Q + \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \right]$  für  $r > R$

andere Möglichkeit über  $\int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho r'^2 \sin \alpha dr' d\alpha d\phi$

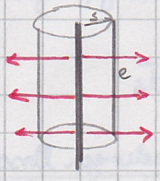
Beip. 3.13  $\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$  Summe über Feld unendlich vieler Punktladungen

$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_0}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dz'$  Symmetrie  $\rightarrow \vec{r} = s \hat{s}$ ;  $\vec{r}' = z' \hat{z}$   $d\alpha = 0$

da klein Betrag von Integral  
 $= \frac{\gamma_0}{4\pi \epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s \hat{s} - z' \hat{z}}{\sqrt{s^2 + z'^2}^3} dz' = \hat{s} \frac{\gamma_0 s}{4\pi \epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s^2 + z'^2}^3} dz' = \hat{s} \frac{\gamma_0 s}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{z'}{s^2 \sqrt{s^2 + z'^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \hat{s} \frac{\gamma_0}{4\pi \epsilon_0} [1 - (-1)] = \hat{s} \frac{\gamma_0}{2\pi \epsilon_0}$

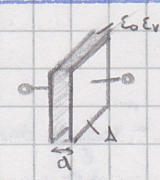
$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{s} \frac{\gamma}{2\pi \epsilon_0} \frac{1}{s}$

andere Möglichkeit:  $\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_V \Rightarrow D_s 2\pi r l = \gamma_0 \cdot l \rightarrow E_s(s) = \frac{D_s(s)}{\epsilon} = \frac{\gamma_0}{2\pi \epsilon s}$



### 3.12 Dielektrikum und Kapazität

$\pm Q, U \Rightarrow C = \frac{Q}{U} \quad C = f(\text{Geometrie, Materie})$



$C = \epsilon \frac{A}{d} = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \frac{A}{d} \quad \begin{cases} U = E \cdot d \\ Q = D \cdot A \end{cases} \rightarrow \frac{Q}{U} = \frac{D \cdot A}{E \cdot d} = \epsilon \cdot \frac{A}{d}$

C berechnen? 1) Q vorgegeben  $\Rightarrow \vec{D} \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow U \Rightarrow C \leftarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q$   
 2) U vorgegeben  $\Rightarrow \vec{E} \Rightarrow \vec{D} \Rightarrow Q \Rightarrow C \leftarrow \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = U$

Bsp 3.16 C in  $\frac{PF}{m} \rightarrow 1)$  oder 2)?  $\rightarrow 1)$  Variante, da  $\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = U \rightarrow \vec{E}$  schwierig

Zylindersymmetrie  $\Rightarrow \partial V \hat{=} \text{Zylindermantelfläche } 2\pi r l \Rightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_V \Rightarrow D \cdot 2\pi r l = Q$

$\Rightarrow D = \frac{Q}{2} = \frac{1}{2\pi r l}$

$\vec{E}(r) = \int \frac{D(r)}{\epsilon_0 \epsilon_r(r)} = \int \frac{Q/2}{2\pi r \epsilon_0 \epsilon_r(r)} \cdot \frac{1}{r}$

$U = \int_{inner}^{outer} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q/2}{2\pi \epsilon_0} \left( \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\epsilon_{r1} r} dr + \int_{r_2}^{r_3} \frac{1}{\epsilon_{r2} r} dr + \int_{r_3}^{r_4} \frac{1}{\epsilon_{r3} r} dr \right) = \frac{Q/2}{2\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \left( \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{\epsilon_{r3}} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) \right) \right)$

$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q/2}{2\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \dots + \frac{1}{\epsilon_{r3}} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) \right)}$

Bsp: 3.18 vgl. 3.13 für Leiter  $x=0 \rightarrow E(r) = \frac{Q/2}{2\pi \epsilon_0 r}$  und Bsp 3.16

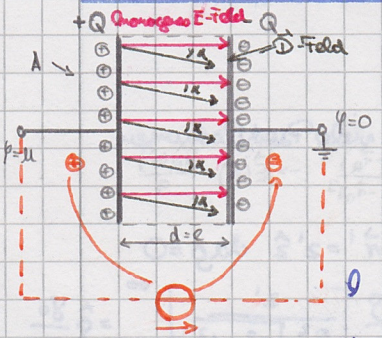
$U = \int_{r_1}^{d-r_2} E_x(x) dx = \int_{r_1}^{d-r_2} \left( \frac{Q/2}{2\pi \epsilon_0 x} + \frac{Q/2}{2\pi \epsilon_0 (d-x)} \right) dx = \frac{Q/2}{2\pi \epsilon_0} \int_{r_1}^{d-r_2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx$

$= \frac{Q/2}{2\pi \epsilon_0} \left( \ln\left(\frac{d-r_2}{r_1}\right) - \ln\left(\frac{d-r_2-d}{r_1-d}\right) \right) = \frac{Q/2}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{(d-r_2)(d-r_2)}{r_1 r_2}\right)$

### 3.13 Energie und Energiedichte

$\rightarrow$  elektrische Feldenergie  
 linear & isotrop  $\rightarrow W = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$  d.h. Energiedichte  
 $w_e = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon \frac{A}{d} \cdot U^2}{\frac{A \cdot d}{\epsilon_0}} = \frac{1}{2} \epsilon \left( \frac{U}{d} \right)^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \rightarrow w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} D \cdot E = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}$  in  $\frac{J}{m^3}$

Falls nichtlinear und anisotrop ???

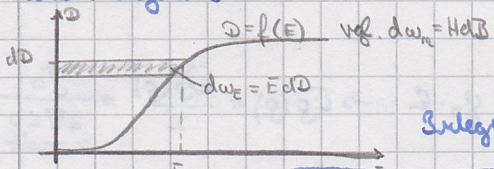


$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = U \Rightarrow E \cdot d = U$   
 $D_n = D \cos \alpha; w_q = \varphi \cdot q; U dQ = dW; dw_e = \frac{dW}{V} = \frac{U}{d} \frac{dQ}{A} = E dD_n$   
 $E D_n = \vec{E} \cdot \vec{D} \rightarrow dw_e = \vec{E} \cdot d\vec{D}$  Formwert der Ladungsmenge (Energiedichte ändern)

linear & isotrop  $\Rightarrow \vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \rightarrow d\vec{D} = \epsilon d\vec{E} \rightarrow dw_e = \vec{E} \cdot d\vec{D} = \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{E} = \epsilon E dE \rightarrow w_e = \int \epsilon E dE = \frac{1}{2} \epsilon E^2$

wieder allgemein

nicht linear & anisotrop:  $dw_e = E dD$



Integralform der Gleichungen: Nützlich falls ausgeprägte Symmetrie

- 1)  $\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = \iiint \rho_{ext} dv$
  - 2)  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$
  - 3)  $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$
- $\rightarrow$  Gauß =  $\iiint \text{div } \vec{D} dv \Rightarrow \text{div } \vec{D} = \rho_{ext}$  lokale Form des Gesetzes, dass Ladungen Ursache von  $\vec{D}$  bzw.  $\vec{E}$  sind

②  $\iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{a} \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = 0$  elektrostatisches Feld ist wirbelfrei (lokale Form)  
 $\hookrightarrow$  es existiert  $\varphi(\vec{r})$  mit  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$

$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \text{grad } \varphi \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \cdot d\vec{s} \rightarrow \vec{E} = -\text{grad } \varphi$

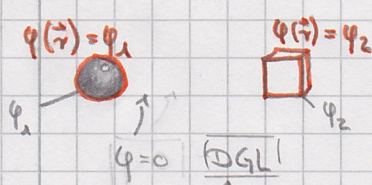
$\text{div } \vec{D} = \rho$  Ziel:  $\varphi(\vec{r})$  berechnen, da damit auch  $\vec{E}(\vec{r})$  bekommt

$\text{rot } \vec{E} = 0 \xrightarrow{\text{deshalb}} \vec{E} = -\text{grad } \varphi \xrightarrow{\text{deshalb}} \text{div}(\epsilon_0 \vec{E}_v(-\text{grad } \varphi)) = \rho$   
 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_v \vec{E} \xrightarrow{\text{linear!!!}} -\epsilon_0 \text{div}(\vec{E}_v \text{grad } \varphi) = \rho$

$\text{div}(\vec{E}_v \cdot \text{grad } \varphi) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  auch erlösen (d.h.  $\vec{E}_v(\vec{r})$  und auch ausrechnen)  
 $\nabla \cdot (\vec{E}_v \cdot \nabla \varphi) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \hookrightarrow$  in der Regel nur numerisch lösbar

(stichweise) homogen und isotrop

$\vec{E}_v \rightarrow \epsilon_v$   
 $\epsilon(\vec{r}) \rightarrow \epsilon_v$  keine Ortsabhängigkeit (weggelassen)  $\rightarrow \epsilon_v \nabla \cdot \nabla \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \nabla \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_v}$   
 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_v} \rightarrow \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_v}$  Poisson-Gleichung  
 $\rho=0 \hookrightarrow \Delta \varphi = 0$  Laplace Gleichung



$\epsilon = \text{const}$  (linear, isotrop & homogen)

$\rho=0$  Bedingung auf Rand des Berechnungsgebietes

Randwertprobleme  $\rightarrow$  Randbedingungen

Klassische Randbedingungen:  $\varphi(\vec{r}) = g(\vec{r})$  für  $\vec{r} \in \partial \Omega$  Dirichlet-Bedingung

$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\vec{r}} = g(\vec{r})$  für  $\vec{r} \in \partial \Omega \rightarrow$  Neumann-Bedingung  
 $\uparrow$   
 $\vec{n} \cdot \text{grad } \varphi = -E_n$

Bsp. 3.22

$\varphi(r) = -\frac{q_0}{4\pi\epsilon} r^2$  für  $r < R \leftarrow \varphi(0) = 0$

innerhalb  $r < R: \Delta \varphi = -\frac{q_0}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -\frac{q_0}{\epsilon} \Rightarrow r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{q_0}{3\epsilon} r^3 + C_1$

außerhalb  $r > R: \Delta \varphi = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = C_2 \Rightarrow \varphi = \frac{C_2}{r} - C_3$   
 $\uparrow$   
 Kugelkoordinaten  $\rightarrow$  Symmetrie  $\rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} = 0$  für  $r > R$

$\Rightarrow$  Potential  $\varphi$  stetig  $\varphi(R^-) = \varphi(R^+)$

I)  $-\frac{q_0}{4\pi\epsilon} R^2 = -\frac{C_2}{R} + C_3$

Beispiel 3.23  $\varphi(\vec{r}) = \varphi(\rho)$  symmetrie  $\rightarrow$  Längs nur von Abstand abh.  $\Rightarrow$   $\Delta\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) = 0$   
Lygl. Laplace  
 $\Delta\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) = 0$   
na Lösebed.  $\partial\varphi/\partial\rho = 0$

$\Rightarrow \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = F \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{F}{\rho} \Rightarrow \varphi = F \ln|\rho| + C_1 = F \ln \rho + C_1$

$\varphi(\rho) = \begin{cases} \underline{F_1} \ln \rho + \underline{C_1} & \text{für Gebiet 1} \\ \underline{F_2} \ln \rho + \underline{C_2} & \text{für Gebiet 2} \end{cases}$   
 für Gebiet 1:  $\varphi(\rho_1) = \varphi_1 \Rightarrow F_1 \ln \rho_1 + C_1 = \varphi_1$  (1)  
 für Gebiet 2:  $\varphi(\rho_2) = \varphi_2 \Rightarrow F_2 \ln \rho_2 + C_2 = \varphi_2$  (2)  
 $\varphi(\rho_m) = \varphi(\rho_m^+) = \varphi(\rho_m^-) \Rightarrow F_1 \ln \rho_m + C_1 = F_2 \ln \rho_m + C_2$  (3)

$\beta = 0 \Rightarrow D_{2m} = D_{1m} \Rightarrow \partial_\rho (\rho D_m) = 0 \Rightarrow \epsilon_0 \epsilon_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)_{\rho_m^-} = \epsilon_0 \epsilon_2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)_{\rho_m^+}$   
 $\Rightarrow \epsilon_{r1} \frac{F_1}{\rho_m} = \epsilon_{r2} \frac{F_2}{\rho_m}$  (4)

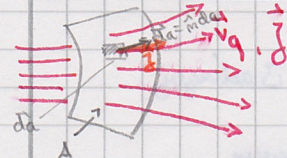
Elektrostatik: ruhende Ladung

157  
④ Das stationäre elektrische Stromfeld

Gleichstromlehre: Ladungen bewegen sich mit einer mittleren Geschwindigkeit ( $\vec{v}_d$ )  
 $\rightarrow$  Driftgeschwindigkeit

stationäres Stromfeld

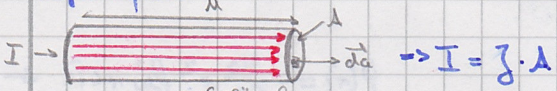
$\vec{I} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$  durch  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  allg.  $i(t) = \frac{dQ}{dt}$  durch



$I$  durch da  $\rightarrow dI = \vec{j} \cdot d\vec{a} = \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot da = \int_n da$

$I_A = \iint_A dI = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{a}$

Spezialfall



$I \leftrightarrow \vec{j}$   $A \leftrightarrow \vec{E}$   
 $I = j \cdot A$   
 $n = r \cdot l \Rightarrow n \sim I$  bzw.  $\vec{j} \sim \vec{E}$

Ohmsches Gesetz in lokaler Form

$I = G \cdot U$  Ohmsches Gesetz

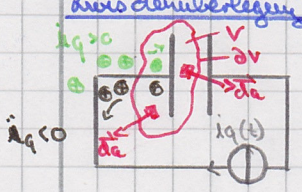
falls  $\vec{j} \sim \vec{E}$   $\rightarrow$  falls linear und anisotrop:  $\vec{j} = \hat{\epsilon} \cdot \vec{E}$   $\rightarrow$   $\epsilon \neq f(\omega) \leftarrow$  S163  
 • linear ( $\vec{j} \sim \vec{E}$ )  
 • isotrop ( $\vec{j} \parallel \vec{E}$ )

Gleichstromlehre:  $\sum I_n = 0$  (Knotenatz)  $\hat{=} \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$

$\sum I_n = 0$  (Stromatz)  $\hat{=} \oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{a} = 0 \xrightarrow{\text{Stromatz}} \iiint_V \text{div } \vec{j} \, dV = 0 \rightarrow \text{div } \vec{j} = 0$

$\text{rot } \vec{E} = 0$   
 $\text{rot } \vec{E} = 0$   
 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$   
 $\vec{j} = \hat{\epsilon} \vec{E}$

Levi-Civita  
 $\oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{a} = - \frac{dQ_V}{dt} = - \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV$   
 nach außen



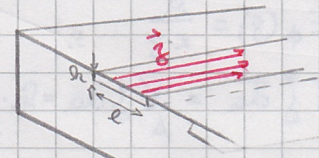
*Gleichstromlehre*



vgl.

$Q, \rho, \delta, \rho \rightarrow dQ = \sigma \cdot da$   
 $dv = h \cdot da = dQ = \rho \cdot dv = \rho \cdot h \cdot da$

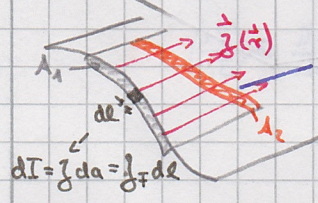
"Flächenladungsdichte" in  $\frac{1}{m^2}$



$\Rightarrow I = j \cdot A = \int j \cdot h \cdot e$   
 $\int_{\text{Fläche}} j$

$\int_{\text{Fläche}} j$  falls Leiterdicke sehr klein (oder  
 starker Skin-Effekt)

166



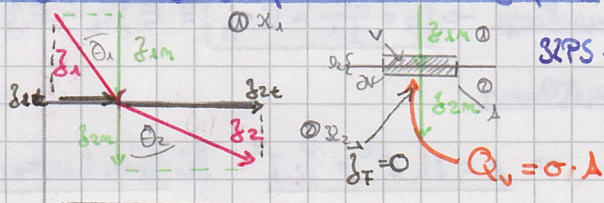
$dI = j \cdot da = \int j \cdot r \cdot dr \cdot d\phi \cdot h = \int j_r \cdot r \cdot dr \cdot d\phi \cdot h$

$\Rightarrow I = \int \int j_r \cdot r \cdot dr \cdot d\phi \cdot h$

$I = \iint_A j \cdot da$   
 $I = \int_C j_r \cdot dr$

167

4.3 Grenzbedingungen für das Strömungsfeld



SPS  $\rightarrow j_{en} \cdot A = j_{em} \cdot A$

$\oint j \cdot da = - \frac{dQ_v}{dt}$

$\Rightarrow j_{en} \cdot A = j_{em} \cdot A = - \frac{d}{dt} \lambda \cdot A$

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$   
 für Str

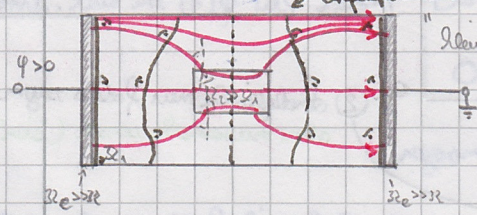
$j_{em} = j_{en} - \frac{\partial \sigma}{\partial t}$  falls  $j_r = 0$   
 $j_{em} = j_{en}$  falls  $j_r = 0$

MS  $\rightarrow E_{2e} = E_{1e}$

$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{j_{1e} / j_{1m}}{j_{2e} / j_{2m}} = \frac{\epsilon_2 \cdot E_{1e}}{\epsilon_1 \cdot E_{2e}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$

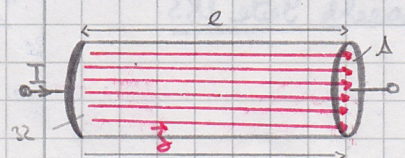
vgl.  $D_{em} = D_{1m}$   
 $E_{2e} = E_{1e}$   
 $\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$

Aquipotentiallinien  $\rightarrow$  Prinzip Aquipotentiallinien anwenden



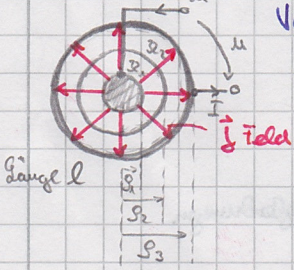
173

4.5 Das Ohm'sche Gesetz und das el. Widerstand



$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{A} = \frac{E \cdot l}{\sigma E \cdot A} = \frac{l}{\sigma A}$

Vergleichen: I vorgeben  $\Rightarrow \dots \Rightarrow U$  berechnen



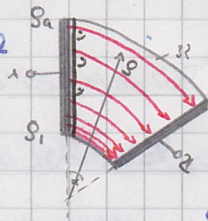
$\iint j \cdot da = I \Rightarrow j \cdot 2\pi s \cdot l = I \Rightarrow j(s) = \frac{I}{2\pi s l} \hat{s}$   
 $E = \frac{1}{\sigma} j$

$U = \int_{s_1}^{s_2} \vec{E} \cdot ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{I}{2\pi \sigma s l} ds = \frac{I}{2\pi \sigma l} \left[ \frac{1}{s_1} \ln \left| \frac{s_2}{s_1} \right| + \frac{1}{s_2} \ln \left| \frac{s_1}{s_2} \right| \right]$

$\Rightarrow R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi \sigma l} \left[ \frac{1}{s_1} \ln \left( \frac{s_2}{s_1} \right) + \frac{1}{s_2} \ln \left( \frac{s_1}{s_2} \right) \right]$

alternativ ggf.:  $U$  verschoben  $\Rightarrow \vec{E} \Rightarrow \vec{j} \Rightarrow I \Rightarrow R$

Bsp 4.2



$$\iint \vec{j} \cdot d\vec{a} \neq I \cdot A = \int \rho \cdot dV (\rho_a - \rho_i)$$

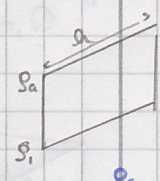
$$U = U_{a2} = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot \rho \cdot \kappa \Rightarrow E_\phi(\rho) = \frac{U}{\kappa \cdot \rho}$$

$$j_\phi(\rho) = \kappa \cdot E_\phi(\rho) = \frac{\kappa \cdot U}{\rho}$$

$$\Rightarrow I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{a} = \iint_A j_\phi da = \rho \cdot \int_{s_i}^{s_a} \frac{\kappa \cdot U}{\rho} d\rho$$

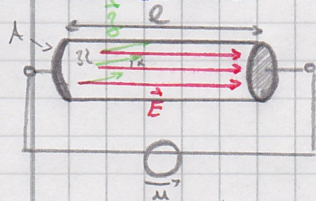
$$\Rightarrow R = \frac{U}{I} = \frac{\kappa}{\rho \cdot \kappa \rho \ln(\frac{s_a}{s_i})}$$

$$= \rho \cdot \frac{\kappa U}{\kappa} \ln(\frac{s_a}{s_i})$$



4.6 Leistungssatz

$$P = U \cdot I \quad \text{Leistung}$$



$$\rightarrow p = \frac{P}{V} = \frac{U \cdot I}{l \cdot A} = E \cdot j \quad \text{Leistungsichte}$$

$$I = \int n \cdot A \quad \text{falls anisotrop} \rightarrow p = \frac{dP}{dV} = \vec{E} \cdot \vec{j} \hat{=} \epsilon j_m = \epsilon j \cos \alpha$$

auch nichtlinear

linear und isotrop  $\rightarrow \vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \quad \& \quad \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} \Rightarrow p = \sigma E^2 = \frac{1}{\sigma} j^2$  für linear isotrop

vgl. allgemein  $P = U \cdot I \xrightarrow{\text{linear}} P = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R} = G U^2 = \frac{1}{G} \cdot I^2$

$$P = U \cdot I = \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{j} \, dV \quad \text{Leistungsrate}$$

4.7 Gesetze des stationären Stromungsfeldes in differentieller Form

lokale Form der Gleichungen im stat. Stromungsfeld

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \text{wirbelfrei} \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = 0$$

$$\oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow \text{quellenfrei} \Rightarrow \text{div } \vec{j} = 0$$

$$\text{grad } \varphi = -\vec{E} \quad \text{falls linear} \quad \vec{j} = \vec{\sigma} \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow \text{div} (\vec{\sigma} \cdot (-\text{grad } \varphi)) = 0$$

$$\rightarrow \text{div} (\vec{\sigma} \cdot \text{grad } \varphi) = 0$$

PDGL für  $\varphi(\vec{r})$  im stat. Stromungsfeld

$$\nabla \cdot (\vec{\sigma} \cdot \nabla \varphi) = 0$$

② Analyse dr nur falls sym. aber immer noch sonst (Sim Physo. Supp.)

$\vec{\sigma} \rightarrow \sigma \neq f(\vec{r})$  d.h. isotrop und (stückweise) homogen

$$\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = 0 \quad \text{Laplace-Gleichung}$$

$\rightarrow$  vgl. E-Statik falls  $\rho = 0$  und homogen/isotrop

4.8 Schlussbemerkungen zum stationären Stromungsfeld Übersicht Seite 183

$$\oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{a} = 0 \leftarrow \text{falls Sym. Probleme vgl. E-Statik}$$

Bsp 4.4  $\Delta \varphi = 0$  im Medium 1 und 2

$$\leftarrow (\text{Bsp. Slabbed. } \sigma \text{ FoSa}) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}) = 0$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = F \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{F}{\rho} \Rightarrow \varphi(\rho) = F \ln(\rho) + G$$

$$\varphi(\rho) = \begin{cases} \underline{F}_1 \ln(\rho) + \underline{G}_1 & \text{für } s_i \leq \rho \leq s_m \\ \underline{F}_2 \ln(\rho) + \underline{G}_2 & \text{für } s_m \leq \rho \leq s_a \end{cases} \rightarrow 4 \text{ Unbekannte} \rightarrow 4 \text{ Gleichungen}$$

$$\varphi(s_i) = \varphi_i \Rightarrow \underline{F}_1 \ln s_i + \underline{G}_1 = \varphi_i \quad (1)$$

$\varphi(s_a) = \varphi_a \Rightarrow \parallel F_2 \ln s_a + G_2 = \varphi_a \quad (2)$

$\varphi(s_m^-) = \varphi(s_m^+) \Rightarrow \parallel F_1 \ln s_m + G_1 = F_2 \ln s_m + G_2 \quad (3)$

$\frac{\varphi_1}{F_1} = \frac{\varphi_2}{F_2} \Rightarrow \parallel \epsilon E_s = \epsilon \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) \text{ abh\u00e4ngig} \Rightarrow \parallel \epsilon_1 \frac{F_1}{s_m} = \epsilon_2 \frac{F_2}{s_m} \quad (4)$

$\rightarrow \epsilon_1 \text{ statig} \Rightarrow \epsilon_2 \text{ statig}$

Pr\u00fcfung Gleichungssystem aufstellen ohne auszurechnen (Drei Felder auf)

2. Geometrie I vorgegeben  $\Rightarrow \vec{j} = ??$  mit  $I = \iint_A \vec{j} \, d\vec{a}$

$\text{sym. } \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$

$\oint \vec{j} \cdot \vec{A} = I \quad A = d \cdot \rho \cdot x$

$\rightarrow \oint \vec{j}(s) = \frac{I}{d \cdot x} \cdot \frac{1}{s} \quad \rightarrow \vec{E}_s(s) = \frac{\partial \varphi(s)}{\partial s(s)}$

$U_{i,m} = \varphi_i - \varphi_m = \int_{\varphi_i}^{\varphi_m} \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_0} ds = \frac{I}{\epsilon_1 \epsilon_0} \ln \left( \frac{s_m}{s_i} \right) \Rightarrow \varphi_m = \varphi(s_m) = \varphi_i - \frac{I}{\epsilon_1 \epsilon_0} \ln \left( \frac{s_m}{s_i} \right)$

$I$  aus  $U_{i,a} = \varphi_i - \varphi_a = \int_{\varphi_i}^{\varphi_a} \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_0} ds + \int_{\varphi_m}^{\varphi_a} \frac{1}{\epsilon_2 \epsilon_0} ds = I \cdot \text{Resistor} \Rightarrow I = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{\text{Resistor}} \Rightarrow$  vereinfacht

5) Das station\u00e4re magnetische Feld (Magnetostatik)

Dauermagnete

stromdurchflossene Leiter

Äquivalenz  $\left\{ \begin{array}{l} \text{magnetischer Strom mit (ohne) Spulenzug (u. h. verwickelt)} \\ \rightarrow \text{Ersatzschaltbilder (} \mu_m \dots \text{)} \end{array} \right.$

$\vec{B} \hat{=} \text{magn. Flussdichte (in } T = \frac{Vs}{m^2}) \frac{d\Phi}{da}$

$\oint_{\partial V} \vec{B} \, d\vec{a} = 0$

$\oint_{\partial \Delta} \vec{B} \, d\vec{a} = \Phi$  magn. Fluss

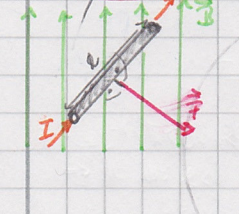
$\vec{H} \hat{=} \text{magn. Feldst\u00e4rke (in } \frac{A}{m})$

$\oint_{\partial \Delta} \vec{H} \, d\vec{s} = I_A = \iint_A \vec{j} \, d\vec{a}$

Durchflutungsgesetz

$\vec{H} = \text{Dawmen}$

$\partial \Delta$  F\u00e4ngt das rechte Kabel (Rechte-Hand-Regel)



Lorentz-Kraft  $\vec{F}_q = q \cdot \vec{v}_q \times \vec{B}$

Z\u00e4hlregel  $\vec{H} = I \vec{z} \times \vec{B}$

$H_s(s) = \frac{I}{2\pi s}$

$\oint_{\partial \Delta} \vec{H} \, d\vec{s} = I_A \Rightarrow H_s 2\pi s = I \Rightarrow H_1 = \frac{I_1}{2\pi d} \Rightarrow B_1 = \mu_0 H_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$

$\alpha = 90^\circ \Rightarrow \vec{F}_2 = I_2 \cdot \vec{L} \cdot \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi d}$

$l = 1m, d = 1cm, I_1 = I_2 = 1A \Rightarrow \vec{F} = 2 \cdot 10^{-7} N$

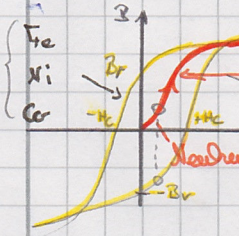
$\Rightarrow \mu_0 = \frac{F_2 2\pi d}{l \cdot I_1 I_2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$

zentrale Gesetze:

$\oint_{\partial V} \vec{B} \, d\vec{a} = 0$

und  $\oint_{\partial \Delta} \vec{H} \, d\vec{s} = I_A$

$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  f\u00fcr Vakuum



anisotropie ( $\vec{B} \parallel \vec{H}$ )  $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \mu_0 \vec{M}(H)$   $\vec{B} = f(H)$  geht nicht abh\u00e4ngig von Vorgeschichte  $\rightarrow$  Simplexwert

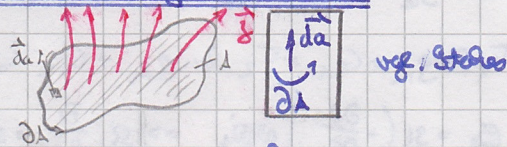
bei Ferromagnetismus: + Nichtlinearit\u00e4t + (abh\u00e4ngig von Historie) + u. h. Anisotropie

$\Rightarrow \vec{B} = \underbrace{\mu_0 \vec{H}}_{\text{Vakuum}} + \underbrace{\mu_0 \vec{M}(H)}_{\text{Magnetisierung}} \quad \text{vgl. } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$   $\xrightarrow{\text{falls linear und isotrop}} \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$

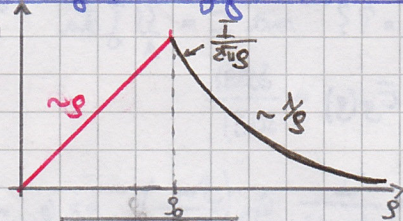
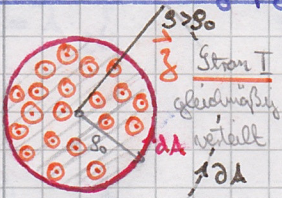
5.7 Das Durchflutungsgesetz zur Berechnung von H-Feldern

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{a} = I_A$$



$$Q_v = \sum \varphi_i + \iint \rho ds + \iint \rho da + \iiint \rho dv \xrightarrow{\text{analog}} I_A = \sum I_i + \int \vec{I} \cdot d\vec{a} + \iint \vec{j} \cdot d\vec{a}$$

Das H-Feld eines langen, geradlinigen kreiszylindrischen Leiters

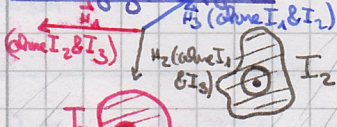


$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = H \cdot 2\pi s = \frac{I}{\pi s_0^2} \pi s^2 = \int 2\pi s^2$$

$$= H(s) = \frac{j \cdot s}{2} \quad \text{innerhalb}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = H \cdot 2\pi s = I \Rightarrow H(s) = \frac{I}{2\pi s} \quad \text{außerhalb}$$

Überlagerung / Aufgabe 3 Leiter

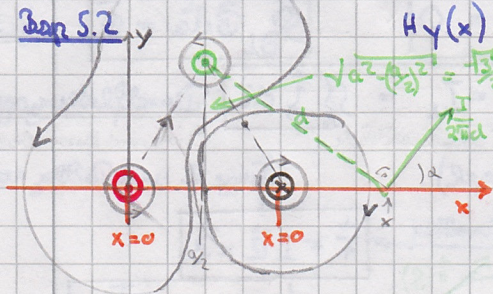


$$\vec{H}_{\text{ges}} = \sum \vec{H}_i$$

Superposition

1) falls lineare Leiter  
2) falls Leiter  $\mu_r \approx 1$  ( $Cu, Al, Ag, Au, P, Ni$ )

Bsp 5.2



$$H_y(x) = \frac{I}{2\pi x} + \frac{2I}{2\pi(a-x)} + \frac{I}{2\pi \sqrt{(x-\frac{a}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2}} \cdot \sin \alpha$$

$\sqrt{a^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2} \cdot 4$   
y wählen aus  $\rightarrow \sin \alpha$

Nach Karte bis Aufgabe 2?

7.09 Bsp. 5.2 weiter

$$\vec{\Phi} = \iint_{R_0} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \iint_{R_0} B_y da = \mu_0 \int_{R_0}^a \int_{-a}^a H_y dx dz = \mu_0 l \int_{R_0}^a H_y(x) dx = \mu_0$$

$$= \mu_0 \cdot l \cdot \frac{I}{2\pi} \int_{R_0}^{a-R_0} \left( \frac{1}{x} - \frac{2}{x-a} + \frac{x-a/2}{a^2 + (x-a/2)^2} \right) dx = \frac{\mu_0 l I}{2\pi} \left[ \ln|x| - 2 \ln|x-a| \right]_{R_0}^{a-R_0}$$

Ungerade lsg x = a/2 -> kommt 0 raus -> nicht berücksichtigen

$$= \frac{\mu_0 l I}{2\pi} \left( \ln \frac{a-R_0}{R_0} - 2 \ln \frac{R_0}{a-R_0} \right) = \frac{3\mu_0 l I}{2\pi} \ln \left( \frac{a-R_0}{R_0} \right) = \text{Fluss aus den diesen beiden Leitern}$$

Bsp 5.3  $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$  keine Winkelabhängigkeit und  $\frac{\partial}{\partial z} = 0 \Rightarrow \vec{H}(\rho) \Rightarrow$  Feldlinien  $\hat{=} \text{Bogen}$

$\oint_{\vec{H}} d\vec{s} = I_{\text{enc}} \leftarrow$  1. Fall  $\rho < R_1$ :  $H_{\phi} 2\pi \rho = 0 \Rightarrow H_{\phi} = 0$

2. Fall  $R_1 \leq \rho \leq R_2$ :  $H_{\phi} 2\pi \rho = \int (\pi \rho^2 - \pi R_1^2) \cdot \frac{I}{\pi R_2^2 - \pi R_1^2} = I \cdot \frac{\rho^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$

$\int = \frac{I}{\pi R_2^2 - \pi R_1^2}$

3. Fall  $R_2 \leq \rho \leq R_3$ :  $H_{\phi} 2\pi \rho = I \Rightarrow H_{\phi} = \frac{I}{2\pi \rho}$

4. Fall  $R_3 \leq \rho \leq R_4$ :  $H_{\phi} 2\pi \rho = I - \int_{R_3}^{\rho} (\pi \rho^2 - \pi R_3^2) \cdot \frac{I}{\pi R_4^2 - \pi R_3^2} \Rightarrow H_{\phi} = \frac{I}{2\pi \rho} - \frac{I}{2\pi \rho} \cdot \frac{\rho^2 - R_3^2}{R_4^2 - R_3^2}$

$\int = \frac{I}{\pi R_4^2 - \pi R_3^2}$

5. Fall  $\rho \geq R_4$ :  $H_{\phi} 2\pi \rho = I - I = 0 \Rightarrow H_{\phi} = 0$

5.8 Grenzbedingungen für das Magnetfeld nicht Dichte im Schnitt (vgl. E-Statik und Stromungs-feld)

$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow B_{1n} \cdot A = B_{2n} \cdot A \Rightarrow \boxed{B_{1n} = B_{2n}}$

$\oint_{\partial V} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_{\text{enc}} \Rightarrow H_{2t} \cdot l - H_{1t} \cdot l = \int_{\Gamma} \cdot l$

$\hookrightarrow H_{2t} = H_{1t}$  falls  $\int_{\Gamma} = 0$

$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{B_{2t}/B_{2n}}{B_{1t}/B_{2n}} = \frac{B_{2t}}{B_{1t}} \cdot \frac{B_{1n}}{B_{2n}} \stackrel{\text{isotrop}}{=} \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{H_{2t}}{H_{1t}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1}$  falls  $\int_{\Gamma} = 0$

$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$   
 $\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$

5.11 Übergang auf die diff Form der Grenzregeln der Magnetostatik

$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 = \iiint_V \text{div}(\vec{B}) dV = 0 \xrightarrow{\text{bel. V.}} \boxed{\text{div} \vec{B} = 0 = \nabla \cdot \vec{B}}$

$\oint_{\partial V} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \vec{j} \cdot d\vec{a} = \iiint_V (\vec{H}) \cdot d\vec{a} \xrightarrow{\text{bel. V.}} \boxed{\text{rot} \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \vec{j}}$

$\text{div}(\text{rot} \vec{H}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) \equiv 0 = \nabla \cdot \vec{j} = \text{div} \vec{j} \Rightarrow$  SPS in Durchflussgesetz enthalten

andere  $\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{ext}} \cdot \vec{H}$  (anisotrop, linear)

neues Hilfsfeld??  $\text{rot} \vec{H} \neq 0 \Rightarrow \vec{H} \neq \pm \text{grad} \varphi_m \quad \vec{A} = \text{mag. Vektorpotential}$

$\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow$  es existiert  $\vec{A}$  mit  $\boxed{\vec{B} = \text{rot} \vec{A}}$

wegen  $\text{div}(\text{rot} \vec{A}) \equiv 0 \quad \hookrightarrow \boxed{\text{div} \vec{A}}$  wird geeignet gewählt (Vektor)

$\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{ext}} \cdot \vec{H} \rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{j}_{\text{ext}}^{-1} \cdot \vec{B} \rightarrow \text{rot} \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{j}_{\text{ext}}^{-1} \cdot \vec{B} \right) = \vec{j}$  wird nun mittels D gelöst (siehe Sinus-Phys. Sys.)

homogen + station  $\text{rot} \left( \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{A} \right) = \vec{j} \Rightarrow \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \mu \vec{j}$

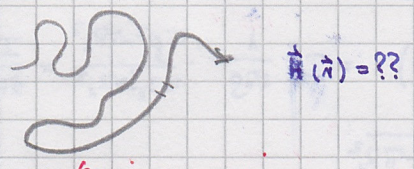
$\text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu \vec{j}$

Coulombs Erlesung  $\text{div } \vec{A} = 0 \Rightarrow$  PDGL für  $\vec{A}(\vec{r})$   $\Delta \vec{A} = -\mu \vec{j}$  vgl.  $\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$

vgl  $\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$

falls linear, isotrop und homogen

$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv'$   $\Rightarrow \Delta A_x = -\mu j_x$   
 $\Delta A_y = -\mu j_y$   
 $\Delta A_z = -\mu j_z$   $\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv'$



3. op. SS (hier nicht unendlich ausgedehnter homogen Raum)

$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{j}$  mit  $\vec{j} = j_z \hat{z} \Rightarrow \vec{A} = A_z \hat{z}$

$\hookrightarrow \Delta A_z = -\mu j_z$   $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$   $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$   $\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial g} \left( g \frac{\partial A_z}{\partial g} \right) = -\mu j_z$  mit  $A_z = A_z(g)$

$g \in \mathbb{R}_L$   $j_z = \frac{I}{\pi R_L^2} \Rightarrow \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial g} \left( g \frac{\partial A_z}{\partial g} \right) = -\mu j_z \cdot g$

$\left( g \frac{\partial A_z}{\partial g} \right) = \frac{1}{2} \mu j_z g^2 + \frac{C_L}{g}$

$A_z(g) = -\frac{1}{4} \mu j_z g^2 + C_L \ln g + D_L$  im Leiter

$R_L \leq g \leq R_S$   $\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial g} \left( g \frac{\partial A_z}{\partial g} \right) = 0 \Rightarrow g \frac{\partial A_z}{\partial g} = \frac{C_S}{g} \Rightarrow A_z(g) = C_S \ln g + D_S$  im Schicht

$g \geq R_S$   $A_z(g) = C_0 \ln g + D_0$  im Luft

6 Unbekannte Randfelder reif nur im Dreieck

$\rightarrow$  Kontinuität aus  $H_z$  stetig (Bm stetig)  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{\mu} \left( -\hat{\phi} \frac{\partial A_z}{\partial g} \right)$

$\vec{H} = \hat{\phi} \begin{cases} \frac{1}{2} j_z g - \frac{C_L}{\mu_0 g} & \text{Leiter (L)} \\ -\frac{C_S}{\mu} \cdot \frac{1}{g} & \text{Schicht (S)} \\ -\frac{C_0}{\mu_0} \cdot \frac{1}{g} & \text{Luft (O)} \end{cases}$

$\vec{H}$  muss endlich bleiben  $\Rightarrow C_L = 0$

$\vec{H}_0$  stetig bei  $g = R_L \Rightarrow \frac{1}{2} j_z R_L - \frac{C_S}{\mu_0} \frac{1}{R_L} = -\frac{C_S}{\mu} \frac{1}{R_L} \Rightarrow C_S = -\frac{\mu_S}{2} j_z R_L^2$

$\vec{H}_0$  stetig bei  $g = R_S \Rightarrow -\frac{C_S}{\mu_S} \frac{1}{R_S} = -\frac{C_0}{\mu_0} \cdot \frac{1}{R_S} \Rightarrow C_0 = \frac{\mu_0}{\mu_S} C_S = -\frac{\mu_0}{2} j_z R_L^2$

5.12 Stromverteilung in unendlich ausgedehnten homogenen Raum

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv'$$

$$\vec{j} dV' \hat{=} \vec{j}_F da' \hat{=} I d\vec{s}' \quad \leftarrow \vec{j} dV' = \vec{j} A ds'$$

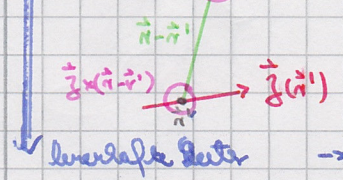
$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} = \frac{1}{\mu} \cdot \text{rot}(\vec{A}) = \frac{1}{4\pi\mu} \text{rot} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv'$$

"Ableitung einer Summe" = Summe der Ableitungen

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi\mu} \iiint_V \text{rot} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv' \quad \left( \text{rot} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\vec{e} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\mu} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dv'$$

Richtung??  $\vec{H}(\vec{r})$    
 Richtfeld kommt aus entgegen   
 Sinn ist mit Rechter-Hand-Regel



falls unendlich = I verbleiben

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\text{Strom}} I(\vec{r}') \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$\vec{r}'$  ist immer der Ort der Ursache (von Strom)  $\Rightarrow \vec{r}$  ist Ort an dem ich Beobachte

ref. Fallung:  $v(t) = \int_{-\infty}^t x(t') g(t-t') dt'$

Beisp. 5.7  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \hat{z}$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{R^2+z^2}$$

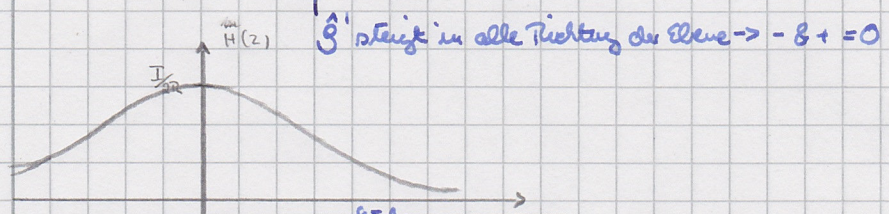
$$\vec{r}' = R \cdot \hat{e}'$$

$$d\vec{s}' \times (\vec{r}-\vec{r}') = R d\phi' \hat{e}' \times (z \hat{z} - R \hat{e}') = R z d\phi' \hat{e}' \times \hat{z} - R^2 d\phi' \hat{e}' \times \hat{e}'$$

$$= R z d\phi' \hat{e}' - R^2 d\phi' (\hat{z})$$

$d\vec{s}' = R d\phi' \hat{e}'$   
 Bogenlänge

$$\vec{H}(0,0,z) = \frac{I}{4\pi\mu} \int_0^{2\pi} \frac{\hat{e}' R z d\phi' + \hat{z} R^2 d\phi'}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \hat{z} \frac{I}{4\pi\mu} \cdot 2\pi \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \hat{z} \frac{I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$



• Zusatz:  $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \oint_{\partial A} \vec{A} \cdot d\vec{s}$  (Vektorpotenzial)

7.09 Bsp. 5.2 weiter

$$\vec{\Phi} = \iint_{R_0} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \iint_{R_0} B_y da = \mu_0 \int_{R_0}^a \int_{-a}^a H_y dx dz = \mu_0 l \int_{R_0}^a H_y(x) dx = \mu_0$$

$$= \mu_0 \cdot l \cdot \frac{I}{2\pi} \int_{R_0}^{a-R_0} \left( \frac{1}{x} - \frac{2}{x-a} + \frac{x-a/2}{a^2 + (x-a/2)^2} \right) dx = \frac{\mu_0 l I}{2\pi} \left[ \ln|x| - 2 \ln|x-a| \right]_{R_0}^{a-R_0}$$

Ungerade lsg x = a/2 -> kommt 0 raus -> nicht berücksichtigen

$$= \frac{\mu_0 l I}{2\pi} \left( \ln \frac{a-R_0}{R_0} - 2 \ln \frac{R_0}{a-R_0} \right) = \frac{3\mu_0 l I}{2\pi} \ln \left( \frac{a-R_0}{R_0} \right) = \text{Fluss aus den diesen beiden Leitern}$$

Bsp 5.3  $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$  keine Winkelabhängigkeit und  $\frac{\partial}{\partial z} = 0 \Rightarrow \vec{H}(\rho) \Rightarrow$  Feldlinien  $\hat{=} \text{Bogen}$

$\oint_{\vec{H}} d\vec{s} = I_{\text{enc}} \leftarrow$  1. Fall  $\rho < R_1$ :  $H_{\phi} 2\pi \rho = 0 \Rightarrow H_{\phi} = 0$

2. Fall  $R_1 \leq \rho \leq R_2$ :  $H_{\phi} 2\pi \rho = \int (\pi \rho^2 - \pi R_1^2) \cdot \frac{I}{\pi R_2^2 - \pi R_1^2} = I \cdot \frac{\rho^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$

$\int = \frac{I}{\pi R_2^2 - \pi R_1^2}$

3. Fall  $R_2 \leq \rho \leq R_3$ :  $H_{\phi} 2\pi \rho = I \Rightarrow H_{\phi} = \frac{I}{2\pi \rho}$

4. Fall  $R_3 \leq \rho \leq R_4$ :  $H_{\phi} 2\pi \rho = I - \int_{R_3}^{\rho} (\pi \rho^2 - \pi R_3^2) \cdot \frac{I}{\pi R_4^2 - \pi R_3^2} \Rightarrow H_{\phi} = \frac{I}{2\pi \rho} - \frac{I}{2\pi \rho} \cdot \frac{\rho^2 - R_3^2}{R_4^2 - R_3^2}$

$\int = \frac{I}{\pi R_4^2 - \pi R_3^2}$

5. Fall  $\rho \geq R_4$ :  $H_{\phi} 2\pi \rho = I - I = 0 \Rightarrow H_{\phi} = 0$

5.8 Grenzbedingungen für das Magnetfeld nicht Dichte im Schnitt (vgl. E-Feld und Stromverteilung)

$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow B_{1n} \cdot A = B_{2n} \cdot A \Rightarrow \boxed{B_{1n} = B_{2n}}$

$\oint_{\partial V} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_{\text{enc}} \Rightarrow H_{2t} \cdot l - H_{1t} \cdot l = \int_{\Gamma} \cdot l$

$\hookrightarrow H_{2t} = H_{1t}$  falls  $\int_{\Gamma} = 0$

$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{B_{2t}/B_{2n}}{B_{1t}/B_{1n}} = \frac{B_{2t}}{B_{1t}} \cdot \frac{B_{1n}}{B_{2n}} \stackrel{\text{isotrop}}{=} \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{H_{2t}}{H_{1t}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1}$  falls  $\int_{\Gamma} = 0$

$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$   
 $\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$

5.11 Übergang auf die diff Form der Grenzregeln der Magnetostatik

$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 = \iiint_V \text{div}(\vec{B}) dV = 0 \xrightarrow{\text{bel. V.}} \boxed{\text{div} \vec{B} = 0 = \nabla \cdot \vec{B}}$   
Quellendichte

$\oint_{\partial V} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \vec{j} \cdot d\vec{a} = \iiint_V (\vec{H}) \cdot d\vec{a} \xrightarrow{\text{bel. V.}} \boxed{\text{rot} \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \vec{j}}$   
Wirbelndichte

$\text{div}(\text{rot} \vec{H}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) \equiv 0 = \nabla \cdot \vec{j} = \text{div} \vec{j} \Rightarrow$  SPG in Durchflussgesetz enthalten

andere  $\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_r \cdot \vec{H}$  (anisotrop, linear)

neues Hilfsfeld??  $\text{rot} \vec{H} \neq 0 \Rightarrow \vec{H} \neq \pm \text{grad} \varphi_m \quad \vec{A} = \text{mag. Vektorpotential}$

$\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow$  es existiert  $\vec{A}$  mit  $\boxed{\vec{B} = \text{rot} \vec{A}}$

wegen  $\text{div}(\text{rot} \vec{A}) \equiv 0 \quad \hookrightarrow \boxed{\text{div} \vec{A}}$  wird geeignet gewählt (Vektor)

$\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_r \cdot \vec{H} \rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{j}_r^{-1} \cdot \vec{B} \rightarrow \text{rot} \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{j}_r^{-1} \cdot \vec{B} \right) = \vec{j}$  wird nun mittels D gelöst (siehe Sinus-Plus-System)



Quasigeometrie + Vektor  $\text{rot} \left( \frac{1}{|\vec{r}|} \text{rot } \vec{A} \right) = \vec{J} \Rightarrow \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \mu \vec{J}$

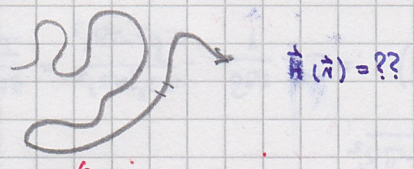
$\text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu \vec{J}$

Coulombs Gleichung  $\text{div } \vec{A} = 0 \Rightarrow$  PDGL für  $\vec{A}(\vec{r})$   $\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}$  vgl.  $\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$

vgl.  $\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$

falls linear, isotrop und homogen

unendlich ausgedehnter homogener Raum  $\Delta A_x = -\mu J_x$   
 $\Delta A_y = -\mu J_y$   
 $\Delta A_z = -\mu J_z$   
 $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$



3. Bsp. SS (hier nicht unendlich ausgedehnter homogener Raum)

$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}$  mit  $\vec{J} = J_z \hat{z} \Rightarrow \vec{A} = A_z \hat{z}$

$\hookrightarrow \Delta A_z = -\mu J_z \xrightarrow{\substack{\partial/\partial \phi = 0 \\ \partial/\partial \phi = 0}} \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial g} \left( g \frac{\partial A_z}{\partial g} \right) = -\mu J_z$  mit  $A_z = A_z(g)$

$g \in \mathbb{R}_L \quad J_z = \frac{I}{\pi R_L^2} \Rightarrow \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial g} \left( g \frac{\partial A_z}{\partial g} \right) = -\mu J_z \cdot g$

$\left( g \frac{\partial A_z}{\partial g} \right) = \frac{1}{2} \mu J_z g^2 + \frac{C_L}{g}$

$A_z(g) = -\frac{1}{4} \mu J_z g^2 + C_L \ln g + D_L$  im Leiter

$\mathbb{R}_L \leq g \leq \mathbb{R}_S \quad \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial g} \left( g \frac{\partial A_z}{\partial g} \right) = 0 \Rightarrow g \frac{\partial A_z}{\partial g} = \frac{C_S}{g} \Rightarrow A_z(g) = C_S \ln g + D_S$  im Schicht

$g \geq \mathbb{R}_S \quad A_z(g) = C_0 \ln g + D_0$  im Luft

6 Unbekannte Randwerte sind nur im Dreieck

$\rightarrow$  Kontinuität aus  $H_z$  stetig (Bm stetig)  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{\mu} \left( -\hat{\phi} \frac{\partial A_z}{\partial g} \right)$

$\vec{H} = \hat{\phi} \begin{cases} \frac{1}{2} J_z g - \frac{C_L}{\mu g} & \text{Leiter (L)} \\ -\frac{C_S}{\mu} \cdot \frac{1}{g} & \text{Schicht (S)} \\ -\frac{C_0}{\mu_0} \cdot \frac{1}{g} & \text{Luft (O)} \end{cases}$

$\vec{H}$  muss endlich bleiben  $\Rightarrow C_L = 0$

$\vec{H}_O$  stetig bei  $g = R_L \Rightarrow \frac{1}{2} J_z R_L - \frac{C_S}{\mu_0} \frac{1}{R_L} = -\frac{C_S}{\mu_S} \frac{1}{R_L} \Rightarrow C_S = -\frac{\mu_S}{2} J_z R_L^2$

$\vec{H}_O$  stetig bei  $g = R_S \Rightarrow -\frac{C_S}{\mu_S} \frac{1}{R_S} = -\frac{C_0}{\mu_0} \cdot \frac{1}{R_S} \Rightarrow C_0 = \frac{\mu_0}{\mu_S} C_S = -\frac{\mu_0}{2} J_z R_L^2$

5.12 Stromverteilung in unendlich ausgedehnten homogenen Raum

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv'$$

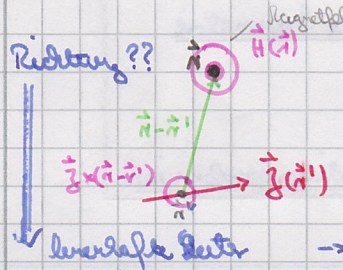
$$\vec{j} dv' \hat{=} \vec{j}_F da' \hat{=} I ds' \quad \text{mit } dv' = Ad s'$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{1}{\mu} \cdot \text{rot}(\vec{A}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\text{rot}(\vec{j}(\vec{r}'))}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv'$$

"Ableitung einer Summe"  $\hat{=}$  Summe der Ableitungen

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \text{rot} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv' \quad \left( \text{rot} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\hat{z} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) \rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dv'$$

Bsp. 7.83



$\rightarrow$  Biot-Savart'sches Gesetz

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{Leiter}} I(\vec{r}') \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

falls unendlich  $= I$  rausnehmen

$\vec{r}'$  ist immer der Ort der Ursache (am Strom)  $\Rightarrow \vec{r}$  ist Ort an dem ich Beobachte

vgl. Fallung:  $v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') g(t-t') dt'$

Bsp. 57  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \hat{z}$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{R^2 + z^2}$$

$$\vec{r}' = R \cdot \hat{\phi}'$$

$$d\vec{s}' \times (\vec{r}-\vec{r}') = R d\phi' \hat{\phi}' \times (z \hat{z} - R \hat{\phi}') = R z d\phi' \hat{\phi}' \times \hat{z} - R^2 d\phi' \hat{\phi}' \times \hat{\phi}'$$

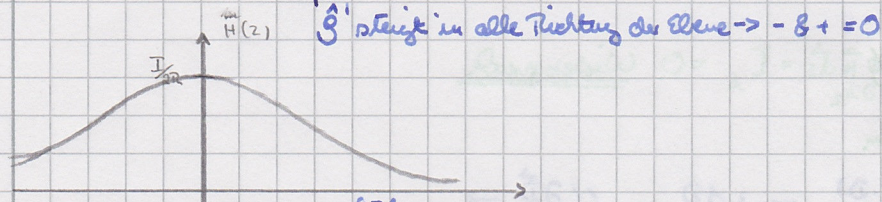
$$d\vec{s}' = R d\phi' \hat{\phi}'$$

Bogenlänge

$$= R z d\phi' \hat{\phi}' \times \hat{z} - R^2 d\phi' (\hat{\phi}' \times \hat{\phi}') = R z d\phi' \hat{\phi}' \times \hat{z} - R^2 d\phi' (\hat{z})$$

$$\vec{H}(0,0,z) = \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R z d\phi' + z \pi^2 d\phi'}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{I}{4\pi} \cdot 2\pi \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$\hat{\phi}'$  nicht da  
 $\hat{\phi}' \times \hat{z}$   
 $\rightarrow 2\pi$



Leiterschleife:  $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \oint_{\partial A} \vec{A} \cdot d\vec{s}$

Vektorpotenzial

22.05.2014 WH  $\rightarrow$  ToSa "Leiterschleife Lagrange'sche"

Bsp. 58  $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \int_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$  Gesetz von Biot-Savart

Rechte Hand-Regel  $\rightarrow$  Strom fließt immer in  $\phi$ -Richtung

Beitrag 1:  $d\vec{s}' = -\hat{x} dx'$

$$\vec{r}-\vec{r}' = 0 - (x'\hat{x} - a\hat{z}) = a\hat{z} - x'\hat{x} \Rightarrow |\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{a^2 + x'^2}$$

$\hat{x} \times \hat{x} = 0; \hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$

$$d\vec{s}' \times (\vec{r}-\vec{r}') = dx' \hat{x} \times (a\hat{z} - x'\hat{x}) = \hat{y} a dx'$$

$$\vec{H}_1(0,0,0) = \frac{I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{a dx'}{(a^2 + x'^2)^{3/2}} \hat{y} = \hat{y} \frac{I a}{4\pi} \left[ \frac{x'}{a^2 \sqrt{a^2 + x'^2}} \right]_{-a}^a = \hat{y} \frac{I}{4\pi} \frac{1}{+2a^2} = \hat{y} \frac{I}{2\pi a} \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$\infty$  ausgeleitete Leiter

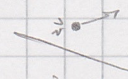
$\vec{H}_2(0,0,0) = 2 \cdot H_1(0,0,0)$  aus Symmetrie = Betrag 2:

$\vec{H}_3(0,0,0) = H_1(0,0,0)$  - " - " = " 3:

Beitrag 4:  $d\vec{s}' = a d\varphi \vec{e}'$ ;  $|\vec{r} - \vec{r}'| = a$ ;  $d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \hat{\varphi} a d\varphi a$

$\vec{H}_4(0,0,0) = \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a d\varphi \vec{e}'}{a^3} \hat{\varphi} = \frac{I}{4\pi a} 2\pi \hat{\varphi}$

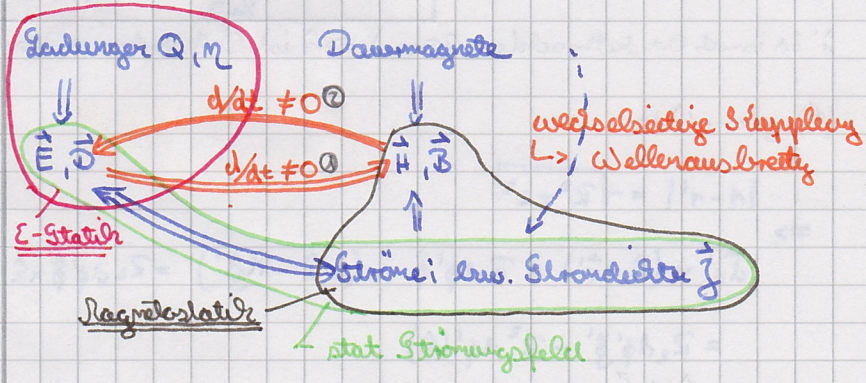
=> Gesamtfeld:  $\vec{H}(0,0,0) = \sum_{i=1}^4 \vec{H}_i(0,0,0) = \hat{\varphi} \frac{I}{2\pi a} \left( \frac{4}{2+2} + \frac{2\pi}{2} \right)$   
 2,3850 -> Fläche als wenn nur ein Leit. über gelassen



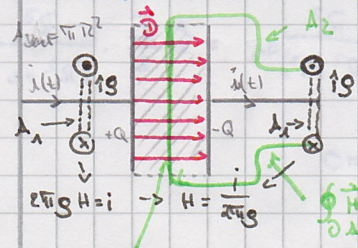
229

- Lösungsverfahren:**
- 1) ausgehend von  $\oint \vec{H} d\vec{s} = I_A$  bei ausgeprägter Symmetrie
  - 2) PDGL für  $\vec{A}(\vec{r})$  lösen
  - 3) Biot Savart falls Stromverteilung im homogenen Medium gegeben ist

6 Die Maxwell-Gleichungen für zeitabhängige Felder



6.1 Erweiterung des Durchflussgesetzes



hier  $\oint_{A_1} \vec{H} d\vec{s} = I_A = \iint_{A_1} \vec{j} d\vec{a}$

$\oint_{A_2} \vec{H} d\vec{s} = I_A = 0$  Widerspruch

$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow$  kein Strom

$i(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(\pi R^2 \cdot \rho)}{dt} = \pi R^2 \frac{d\rho}{dt} = \iint_{A_2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{a}$

allgemein:  $\oint_{A_1} \vec{H} d\vec{s} = \iint_A \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{a}$  Durchflussgesetz in allg. Form

Satz von Stokes  $\rightarrow$  Verschiebungsstromdichte  
 $\rightarrow$  Stromleitungsstromdichte

$\iint_A \text{rot } \vec{H} d\vec{a} \rightarrow$  lokale Form  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$   $\text{div}(\text{rot } \vec{H}) = \text{div } \vec{j} + \text{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \text{div } \vec{j} + \frac{d}{dt} \text{div } \vec{D} = 0$

$\rightarrow \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$   
 $\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

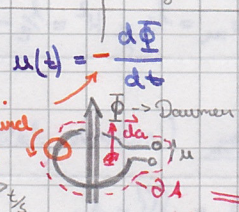
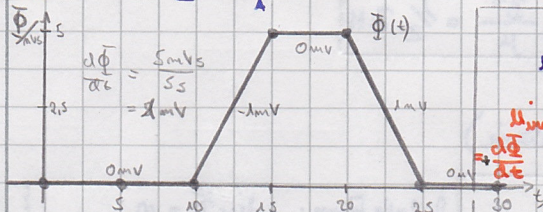
lokale Form des Ladungserhaltungssatzes (Stromerhaltungsgleichung)

$\iiint_V \text{div } \vec{j} dV = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$   
 Satz v. Gauß

23.05.2014  
 233 W 6.2 Das Faraday'sche Induktionsgesetz

$A = 5 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^2 \rightarrow 100 \text{ cm}^2 \cdot 0,5 \frac{\text{Vs}}{\text{m}} = 0,005 \text{ Vs}$

Beisp. 6.1: Fluss  $\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{a}$



**Rechenste nicht mehr gültig**

2. Interpretation ohne formale Spang Quelle

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = u = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

$$= - \iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

ind. Spang.

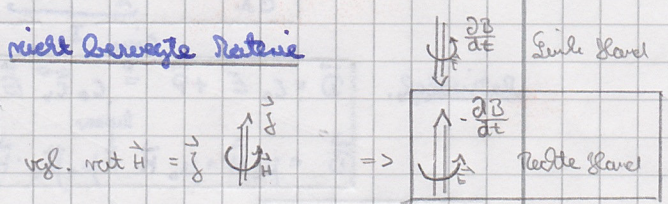
$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{a} \stackrel{\text{lokal}}{=} \iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

Satz von Stokes

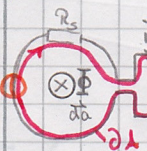
$$\iint_A \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

ind. Gesetze lokale Form:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



Beisp. 6.2



anal. Interpretation

2. Interpretation  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = R_s i + R_i i = - \frac{d\Phi}{dt}$

$$i = - \frac{1}{R_s + R_i} \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow u_R = R_i \cdot i = - \frac{R_i}{R_s + R_i} \frac{d\Phi}{dt}$$

Fluss  $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{a} = \iint \frac{\mu_0 i}{2\pi r} dz = 2 \cdot \int_0^{2a} \int_0^{2b} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} dz dr = 2 \cdot \int_a^b \frac{\mu_0 i}{2\pi r} 2a dr = \frac{\mu_0 i}{\pi} [2ab \ln 2 - a]$

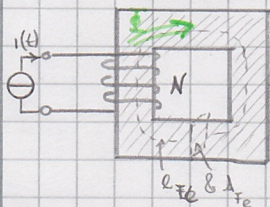
$H = \frac{i}{2\pi r} \Rightarrow B = \mu_0 H$

$= \frac{\mu_0 i}{\pi} [2ab \ln 2 - a] = \mu_0 i a = \frac{2ab \ln 2 - 1}{\pi} i$

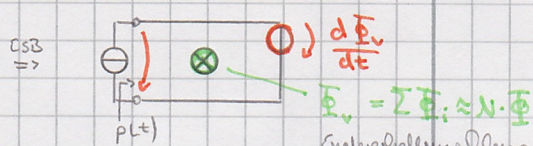
$\Rightarrow u_R = - \frac{R_i}{R_s + R_i} \mu_0 a \frac{2ab \ln 2 - 1}{\pi} \frac{di}{dt} \leftarrow i(t) = I \sin(\omega t) \Rightarrow u_R(t) \approx -4,7531 \mu V \cos(\omega t)$

Selbstinduktion auf geringen Strom  $i_s$  vernachlässigt.

Energie im Magnetfeld ← erst hier, da Begründung basierend auf Induktionsgesetz



Anfang:  $t_A, i(t_A)$   
 Ende:  $t_E, i(t_E)$

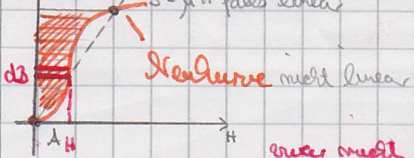


$p(t) = i(t) u_{\text{ind}}(t) = i(t) \frac{d\Phi_V}{dt}$   
 $W_m(t_E) - W_m(t_A) = \int_{t_A}^{t_E} p(t) dt$

$\Delta W_m = \int_{\Phi_A}^{\Phi_E} i d\Phi_V$  mit  $\Phi = B_{Fe} \cdot A_{Fe}$   
 $H_{Fe} \cdot l_{Fe} = N \cdot I$  (Doppel gut)  
 $\Phi_V = N \Phi$

$\Delta W_m = \int \frac{H_{Fe} \cdot l_{Fe}}{N} \cdot N \cdot A_{Fe} \cdot dB_{Fe} = V_{Fe} \int H_{Fe} dB_{Fe} = V_{Fe} \int H dB$

Energieveränderung  $\Delta W_m = \frac{\Delta W_m}{V_{Fe}} = \int_{B_A}^{B_E} H dB$



$dW_m = H \cdot dB$  magn. Energieveränderung bei Variation der magn. Flussdichte um dB  
 wenn nicht linear aber isotrop  $\Rightarrow$  ohne Beweis  $dW_m = \vec{H} \cdot d\vec{B}$  allgemein

$$\int_0^B H dB = \int_0^B \frac{1}{\mu} B dB = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{\mu^2 H^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2$$

magn. Energiedichte (linear):  $w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} B H$   
+ isotrop

6.3 Satz der Maxwell-Gleichungen (rotierende Materie)

integrale Form:

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_v = \iiint_V \rho dv$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \iint_A \frac{d\Phi}{dt} \cdot d\vec{a}$$

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{a} + \iint_A \frac{\partial \Phi}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

lokale Form:

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

8 skalare Gleich.  
4-3 = 12 Nulldiverz.  
ist Fluss durch  $\vec{E}$  umgeben ohne Strom  $\rightarrow$  rot = 0  
rot = 0  $\rightarrow$  nur und Totfeld  
Circul

Materialgl.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \stackrel{\text{linear}}{=} \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \stackrel{\text{linear}}{=} \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}_m \cdot \vec{E}$$

in Quellen  $\vec{j}_e$  und  $\vec{j}_m$   $\rightarrow$  außerhalb der Quellen  $\vec{j}_e \cdot \vec{E}, \rho$   
 $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

eingepreagte Stromdichte (vgl. Stromquelle)

6.4 Lösung der Maxwell-Gleichungen (Vektorlagerungen)

stichweise  $\vec{D}$  homogen, isotrop und linear

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} ; \vec{B} = \mu \vec{H} ; \vec{j} = \vec{j}_e + \mu \vec{E}$$

außerhalb der Quellen raumladungsfrei  $\Rightarrow \rho = \rho_e$  (Begründung siehe Skript) und nicht dispersiv

$$\Rightarrow \epsilon \text{div } \vec{E} = \rho_e ; \mu \text{div } \vec{H} = 0 ; \text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} ; \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_e + \epsilon \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

allgemeiner Fall  $\rightarrow$  falls linear und isotrop  $\omega_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} D E$   
auch multilinear  $\rightarrow$   $\omega_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} B H$   
und anisotrop

ref. E-Strahlung  $\text{rot } \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\text{grad } \varphi$   $\rightarrow$  Potential  $\varphi(\vec{r})$

falls  $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$   $\text{rot } \vec{E} \neq 0 \Rightarrow$  Potential existiert nicht

Elektrodynamische Potentiale (Lilppotential)

mag. Vektorpotential

$$\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \text{es existiert } \vec{A}(\vec{r}, t) \text{ mit } \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = \text{rot} \left( - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \Rightarrow \text{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \text{grad } \varphi$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \rightarrow \text{rot } \vec{E} = \text{rot} \left( -\text{grad } \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = 0 - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = -\text{grad } \varphi$$

PDGL für  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  und  $\varphi(\vec{r}, t)$  homogen, isotrop, linear und  $\rho = 0$

$$\Rightarrow \text{div} (\epsilon \vec{E}) = \rho_e \Rightarrow \epsilon \text{div} \left( -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\rho_e \Rightarrow \Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} = -\frac{\rho_e}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{H} = \text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \vec{B} \right) = \frac{1}{\mu} \text{rot} (\text{rot } \vec{A}) = \frac{1}{\mu} \text{grad } \text{div } \vec{A} - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = \vec{j}_e + \epsilon \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\text{grad} (\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu \vec{j}_e + \epsilon \mu \left( -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \left( -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

5.06.2013

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \epsilon_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j}_e + \text{grad}(\text{div} \vec{A} + \epsilon_0 \mu \varphi + \epsilon_0 \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t})$$

Bedingung:  $\text{div} \vec{A} + \epsilon_0 \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \epsilon_0 \mu \varphi = 0$

PDGL für  $\vec{A} \Rightarrow \Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \epsilon_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j}_e$

$\text{div} \vec{A} = -\epsilon_0 \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \epsilon_0 \mu \varphi$

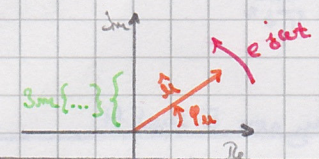
$\Delta \varphi - \epsilon_0 \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \epsilon_0 \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0}$  PDGL für  $\varphi(\vec{r}, t)$

$\Delta \varphi$  in Skalar  $\Rightarrow$  Poisson-Gleichung

Vorüberlegungen zur Lösung der PDGL

$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(x, y, z, t)$   $\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot u = 0 \rightarrow u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) = \text{Im} \{ \hat{u} e^{j\omega t} \}$

$\varphi = \varphi(\vec{r}, t) = \varphi(x, y, z, t)$   $\frac{du}{dt} \rightarrow j\omega \hat{u}$



$u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u) = \text{Re} \{ \hat{u} e^{j\omega t} \}$  mit  $\hat{u} = \hat{u} e^{j\varphi_u}$   
 $\rightarrow$  auf horizontale Achse projizieren

$\begin{cases} \text{Re} \delta^y = \cos \varphi \\ \text{Im} \delta^y = \sin \varphi \end{cases}$

$f(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \hat{f}(\vec{r}) e^{j\omega t} \}$  mit  $\hat{f}(\vec{r}) \hat{=}$  komplexe Amplitude und  $\omega$

$F(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \hat{F}(\vec{r}) e^{j\omega t} \}$  mit  $\hat{F}(\vec{r}) \hat{=}$  komplexe Amplitudenwert

$\hookrightarrow$  skalare Lösung für ebene Wellen, Signale und Frequenz

$\Rightarrow \frac{d}{dt} \rightarrow j\omega$

z.B.  $u = \frac{d}{dt} \rightarrow \hat{u} = j\omega \hat{u}$   
 $i = \frac{du}{dt} \rightarrow \hat{i} = j\omega \hat{i}$

Verteilte Lösung im Bild-/Frequenzbereich

1)  $\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow j\omega$

2) auch dispersive Materie Fallung  $\rightarrow$  Produkt

$\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) - j\epsilon''(\omega)$   
 $\mu(\omega) = \mu'(\omega) - j\mu''(\omega)$

PDGL für  $\vec{A}$  und  $\varphi$

$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$   
 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow (j\omega)^2 = -\omega^2$

PDGL für  $\vec{A}(\vec{r})$  und  $\varphi(\vec{r})$

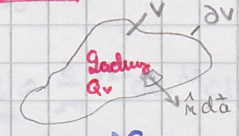
Langwelligkeitsnäherung  
 $\leftarrow$  rechte Leit = 0  $\rightarrow$  Wellenwiderstand  $(Z=0)$   $\epsilon_0 \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$   
 $\rightarrow$  viele Klein Effekte mit  $\epsilon_0 \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \approx 0$

$\Delta \vec{A} + (\omega^2 \epsilon \mu - j\omega \mu \sigma) \vec{A} = -\mu \vec{j}_e$  und  $\Delta \varphi + (\omega^2 \epsilon \mu - j\omega \mu \sigma) \varphi = -\frac{\rho_e}{\epsilon}$

$\boxed{k^2 = \omega^2 \epsilon \mu - j\omega \mu \sigma}$   $k \hat{=}$  Wellen "zahl"  $= k^2$

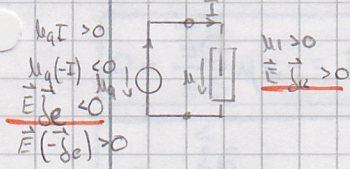
4) Energie im elektromagnetischen Feld

Ladungserhaltung

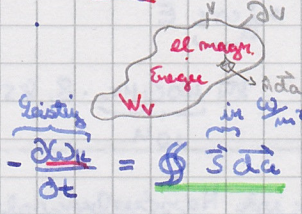


$\oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{a} = -\frac{dQ_V}{dt}$

$Q_V \uparrow$  falls  $\int_V \vec{j} \cdot d\vec{a} < 0$   
 $Q_V \downarrow$  falls  $\int_V \vec{j} \cdot d\vec{a} > 0$



Energieerhaltung



$W_V = \int_V (\omega_e + \omega_m) dV$

$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{a} = \int_V \text{div} \vec{j} dV$

$-\frac{\partial W}{\partial t} = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{a} + \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV$

$W_V \downarrow$  falls Verluste (Wärme) und/oder Energiefluss nach außen  
 $W_V \uparrow$  falls  $\vec{E} \cdot \vec{j} = \vec{E} \cdot (\vec{j}_s + \vec{j}_e)$ ; Quasiquellen oder Energieerzeugung

$\rightarrow$  lokal  $V \rightarrow \frac{\partial W}{\partial t} = \text{div} \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{j}$  lokale Erhaltungssatz

$\boxed{-\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{E} \cdot (-\vec{j}_e) = \text{div} \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{j}_e}$

2.2 Energiefluss und Poynting Vektor  $\vec{S}$

$$\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) \stackrel{\text{Vektor}}{=} \vec{H} \text{ rot } \vec{E} - \vec{E} \text{ rot } \vec{H} = \vec{H} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) - \vec{E} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = -\vec{H} \frac{d\vec{B}}{dt} - \vec{E} \cdot \vec{j} - \vec{E} \cdot \frac{d\vec{D}}{dt}$$

$$\frac{d\omega_e}{dt} = \vec{E} \cdot \frac{d\vec{D}}{dt}$$

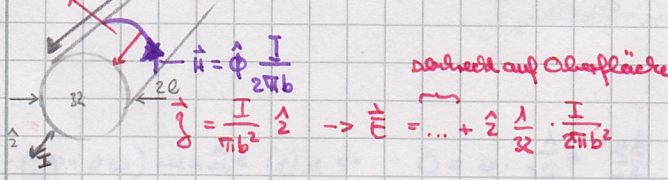
$$\frac{d\omega_m}{dt} = \vec{H} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{S} = \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) \quad \text{da } \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

Poynting Vektor  $\rightarrow$  Vorsicht mit  $\vec{S}$  nicht definiert (siehe Seite 268)

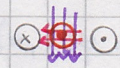
Bsp. 2.1



$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{\pi b^2}$

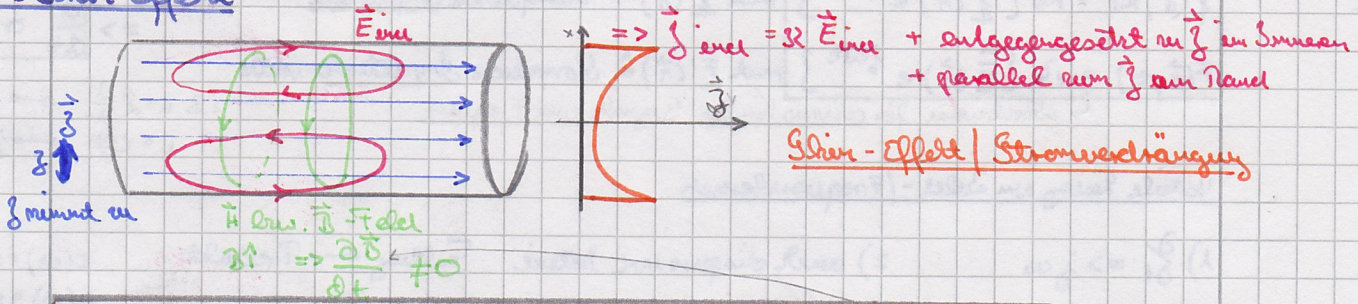
$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \left(-\hat{\phi}\right) \frac{I^2}{2\pi b^2 \cdot 2\pi b}$   
 Parallel zur Mantelfläche aber keine Energie im Leiter fließen

$\oint_{\text{Mantelfläche}} \vec{S} \cdot d\vec{a} = \frac{I}{2\pi b} \cdot \frac{I}{2\pi b} \cdot \frac{2\pi b \cdot l}{\text{Fläche}} = 2I^2$   
 $\rightarrow P = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{\pi b^2}$



3. Lösen der Maxwell-Gleichungen bei unvollständiger Stopplung von E und H

3.2 Skin Effekt



Effekt umso größer + je höher  $\omega$  (schnellere Änderung  $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \uparrow$ )  
 + je höher  $\mu$  (da  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \uparrow$ )  
 + je größer  $\sigma$  (wegen  $\vec{j}_{\text{in}} = \sigma \vec{E}_{\text{in}}$ )

quantitative Betrachtung des Skin-Effekts  $\sigma, \mu, \omega$  (homogen, isotrop, linear)  $\eta = 0$  außerhalb der Quellen ( $\rho_e = 0, \vec{j}_e = 0$ )  $\Rightarrow \epsilon \text{div } \vec{E} = 0; \mu \text{div } \vec{H} = 0; \text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \text{rot } \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

guter Leiter  $\rightarrow \sigma$  groß (z.B.  $\sigma_{\text{Cu}} \approx 56 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ )

$e^{j\omega t} \rightarrow \sigma \vec{E} + j\omega \epsilon \vec{E}$   
 z.B.  $\sigma_{\text{Cu}} \quad 2\pi \cdot 100 \text{ GHz} \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \approx 50 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-12} \frac{\text{S}}{\text{m}} \approx 5 \frac{\text{S}}{\text{m}}$   
 $56 \cdot 10^6 \rightarrow \uparrow \downarrow$

$\rightarrow$  in guten Leitern ist Nerschwingungsstromlicht  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  sehr viel kleiner als Leitungsstromdichte  $\sigma \vec{E}$

$\Rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$   
 $\text{rot } \vec{H} = \sigma \vec{E}$   
 $\text{rot rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H}$   
 $\text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \sigma \vec{E}$   
 $= 0$   
 $\Delta \vec{E} = -\sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$   
 $\Delta \vec{j} = -\sigma \mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0$   
 oder  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

Lösung dieser PDGL (von Wärmeleitungstyp)

$\vec{j}(\vec{r}, t)$  mit 4 Unabhängigen  $\rightarrow \vec{j}(\vec{r})$  mit 3 Unabhängigen  
 nur cos-förmige Abhängigkeit  $\Rightarrow \Delta \vec{j} - j\omega \epsilon \mu \vec{j} = 0$  mit  $\vec{j}(\vec{r})$  mit 3 Unabhängigen

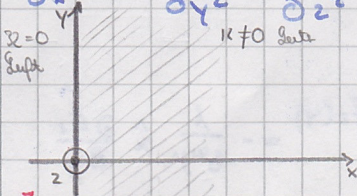
$\sqrt{\epsilon} = ? = z$  d.h.  $z^2 = j \rightarrow z = \rho e^{i\phi} \Rightarrow \rho^2 e^{2i\phi} = j = e^{i\pi/2} \Rightarrow \rho = 1, \phi = \pi/4$

$\gamma^2 = j\omega \epsilon \mu \Rightarrow \gamma = \sqrt{j\omega \epsilon \mu}$   
 $\Rightarrow \sqrt{j} = e^{i\pi/4} = \pm \frac{1+i}{2}$

$\Rightarrow \gamma = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \epsilon \mu} = \frac{1+i}{\delta}$  mit  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \epsilon \mu}}$

↓ Punkt-Skalarprodukt  $\vec{j} = j_z \hat{z}$   $\hookrightarrow \delta =$  **Wandungstiefe**

$\frac{\partial^2 j_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 j_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 j_z}{\partial z^2} - \gamma^2 j_z = 0$  **Spezialfall**  
 $\vec{j}(\vec{r}) = j_z(x) \hat{z}$



Symmetrie  $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 j_z}{\partial x^2} - \gamma^2 j_z = 0$  DGL für  $j_z(x)$

mit  $j_z(0) = j_{z0}$  (1) und  $j_z(x)|_{x \rightarrow \infty} = 0$  (2)

$\rightarrow e^{\lambda x}$ -Ansatz (homogene Lösung)  $\lambda^2 e^{\lambda x} - \gamma^2 e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \gamma$

$j_z(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{+\gamma x}$  mit  $\gamma = \frac{1+i}{\delta}$   
 $A_1 = j_{z0}$   $A_2 = 0$  wegen (2)

$\Rightarrow j_z(x) = j_{z0} e^{-\gamma x} = j_{z0} e^{-\frac{x}{\delta} (1+i)}$   
 Betrag = 1

Stark ausgeprägter Skin-Effekt

bei  $x = \delta$  Betrag auf  $1/e \approx 37\%$  abgefallen

12.06.2014 WH

$\Delta \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - c \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = -\mu \vec{j}_e$   
 $\Delta \varphi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon}$

(abweisend) homogen, linear, zeitlich, nicht dispersiv,  $\eta = 0$  außerhalb der Quellen

**Skin-Effekt** in sehr guten Leitern ( $\epsilon E \gg c E$ )  $\rightarrow \Delta \vec{F} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} = 0$  außerhalb der Felder  
 für  $\vec{E}, \vec{H}$  oder  $\vec{j}$

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  gegen  $\epsilon \vec{E}$  vernachlässigt

Wandungstiefe  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \epsilon \mu}}$  z.B.  $f = 100 \text{ kHz}$ ;  $\epsilon = 50 \cdot 10^{-6} \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ,  $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-4} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$   $\Rightarrow \delta \approx \sqrt{\frac{2}{2\pi \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 4\pi \cdot 10^{-4}}}$   
 $\approx \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{10^6}} \text{ m} \approx 0,152 \text{ mm}$

Bsp. 8.1

$\vec{j}(\vec{r}, t) = \hat{z} j_z(y, t)$

$\Delta \vec{j} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{j}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \hat{z} \Delta j_z - \epsilon \mu \hat{z} \frac{\partial^2 j_z}{\partial t^2} = 0$   
 $\hookrightarrow \frac{\partial^2 j_z}{\partial y^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 j_z}{\partial t^2} = 0$  (Wellengleichung)

Wellengleichung

$\frac{\partial^2 j_z}{\partial y^2} - \gamma^2 j_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 j_z}{\partial y^2} = \gamma^2 j_z$

$\gamma_1^2 = j\omega \epsilon_1 \mu_0$   $\gamma_2^2 = j\omega \epsilon_2 \mu_0$   
 $\Rightarrow j_z(y) = \begin{cases} \underline{F}_0 e^{\gamma_1 y} + \underline{G}_0 e^{\gamma_2 y} & \text{oben} \\ \underline{F}_m e^{\gamma_1 y} + \underline{G}_m e^{\gamma_2 y} & \text{Mitte} \\ \underline{F}_\mu e^{\gamma_1 y} + \underline{G}_\mu e^{\gamma_2 y} & \text{unten} \end{cases}$  6 Unbekannte



Symmetrie  $\epsilon_2(y)$  gerade in  $y \Rightarrow \vec{F}_m = \vec{G}_m$   $\epsilon_1$  &  $\epsilon_2$  -d. w.  $\Rightarrow \vec{F}_0 = \vec{G}_0$  &  $\vec{F}_m = \vec{G}_0$

$\epsilon_2(y) = \epsilon_2(y)$

$$\epsilon_2(y) = \begin{cases} B e^{\gamma_2 y} + C e^{-\gamma_2 y} & \text{oben} \\ A e^{\gamma_1 y} + A e^{-\gamma_1 y} & \text{mitte} \\ C e^{\gamma_2 y} + B e^{-\gamma_2 y} & \text{unten} \end{cases} \Rightarrow \text{Stromdichtete}$$

$E_z = \frac{1}{\epsilon_2} \epsilon_2$  stetig (1. Gl.) bei  $y=d \rightarrow \frac{1}{\epsilon_2} (B e^{\gamma_2 d} + C e^{-\gamma_2 d}) = \frac{1}{\epsilon_1} (A e^{\gamma_1 d} + A e^{-\gamma_1 d})$  (1. Gl.)

$\rightarrow \epsilon_m$  stetig  $\Rightarrow$  nicht nicht

$D_m$  stetig  $\Rightarrow$  --

$B_m$  stetig  $\rightarrow$  nur 3. Komponente  $\Rightarrow$  nur  $H_x \rightarrow$  nicht nicht

$H_{tan}$  stetig  $\Rightarrow H_x$  stetig

$\Rightarrow \text{rot}(\vec{E}) = -j\omega\mu\vec{H} \rightarrow \vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \text{rot}\vec{E} \leftarrow \hat{z} E_z(y) = -\frac{1}{j\omega\mu} \hat{x} \frac{\partial E_z}{\partial y}$

$H_x = -\frac{1}{j\omega\mu\epsilon_2} \frac{\partial \epsilon_2}{\partial y}$  gilt in jeder der 3. Schichten

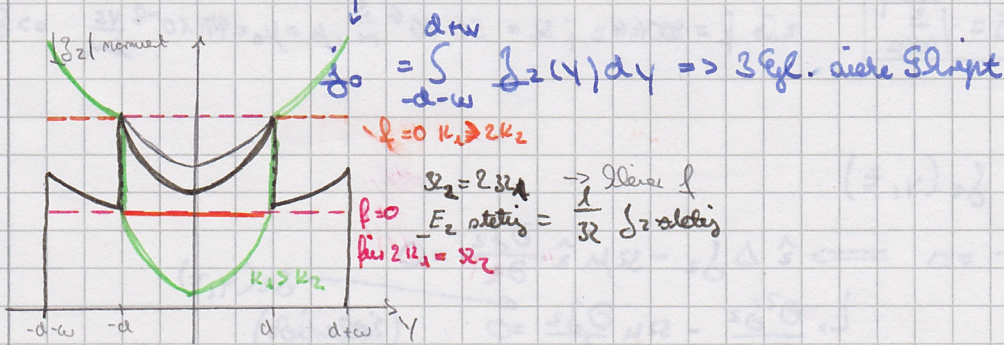
$$H_x(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\gamma_2} (\gamma_2 B e^{\gamma_2 y} - \gamma_2 C e^{-\gamma_2 y}) & \text{oben} \\ -\frac{1}{\gamma_1} (\gamma_1 A e^{\gamma_1 y} - \gamma_1 A e^{-\gamma_1 y}) & \text{mitte} \\ \dots & \text{unten} \end{cases}$$

$H_x$  stetig bei  $y=d \Rightarrow -\frac{1}{\gamma_2} B e^{\gamma_2 d} + \frac{1}{\gamma_2} C e^{-\gamma_2 d} = -\frac{1}{\gamma_1} A e^{\gamma_1 d} + \frac{1}{\gamma_1} A e^{-\gamma_1 d}$  (2. Gl.)

$\cosh z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z})$

$\sinh z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z})$  für Skript

$dI = \epsilon_2 dx dy \Rightarrow \frac{dI}{dx} = \epsilon_2 dy$



8.3 & 8.4  
Nicht Prüfungsrelevant

5) Lösungen der Maxwell-Gleichungen bei vollständiger Stopplung von E und H

•  $\rho, j, \epsilon$  nicht disp. etc.

$$\epsilon \operatorname{div} \vec{E} = \rho_e \rightarrow \text{außerhalb der Felderquellen}$$

$$\mu \operatorname{div} \vec{H} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_e + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\rightarrow \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\rightarrow \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\vec{H} \Leftrightarrow \vec{E}$

Stopplung auch im Vakuum

Abstrahlung und Ausbreitung el. magn. Wellen

•  $\rho, j, \epsilon$  nicht disp.

$$\Delta \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j}_e$$

$$\Delta \varphi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

inhomogen PDGL

homogene PDGL

Def.:  $\epsilon \mu = 1/c^2$  bzw.  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$

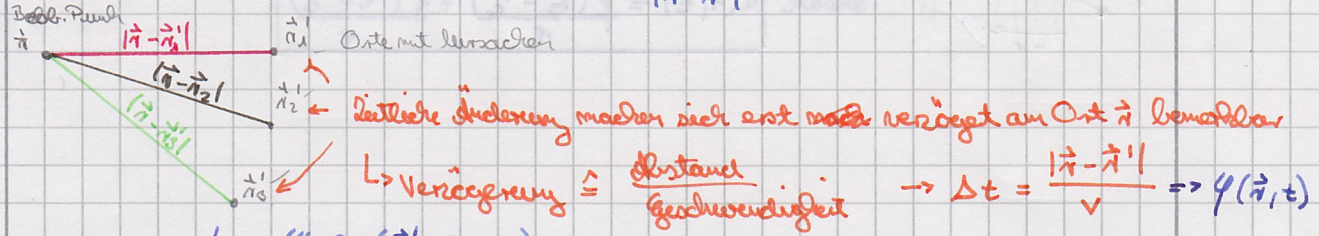
Lösung für 1 & 2 für gegebene  $\vec{j}_e$  und  $\rho_e$  in unendlich ausgedehnten homogenen Raum (i.d.R. Vakuum mit  $c = c_0$  bzw.  $\mu_0$ )

??

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho_e}{\epsilon} \Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho_e(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

Retardiert

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{j}_e \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}_e(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$



$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho_e(\vec{r}', t - \Delta t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

in PDGL  $\rightarrow v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \hat{=} \text{Ausbreitungsgeschw.}$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}_e(\vec{r}', t - \Delta t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

Verzögerung  $\hat{=} \text{Retardierung}$  d. magn. (Lichtgeschwindigkeit)  $\rightarrow \vec{A}$  und  $\varphi$  retardierte Potentiale

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c_0 = 2,997 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 300'000 \frac{\text{km}}{\text{s}} \text{ im Vakuum}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}, t)$$

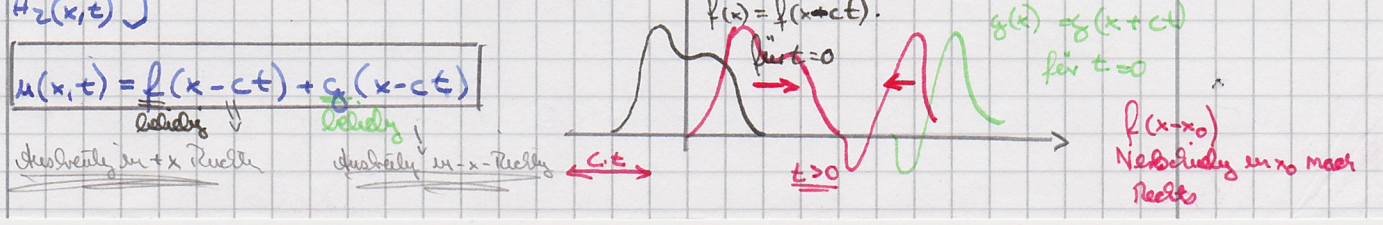
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Lösung für 3 & 4 (mögliche Lösungen außerhalb der Ionen)  $\rightarrow$  Gedanken an mögl. homogenen Lösung (z.B. ebene Welle, Sinuswelle, ...)

1D-Problem  $\rightarrow x$  mit  $\vec{j}_x \neq 0$  (aber  $\vec{j}_y = \vec{j}_z = 0$ )

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

1D-Wellengleichung



oder  $u(x,t) = \tilde{f}(t - \frac{x}{c}) + \tilde{g}(t + \frac{x}{c})$

$\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$

$\Delta t = -\frac{\Delta x}{c}$

$\rightarrow \left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$  = Geschw. mit der sich das Signal f bzw. g ausbreitet

Spezialfall:  $\tilde{f}(t) = M_0 \cos(\omega t + \alpha_0)$

Wellenwahl  $\rightarrow \left| c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \right|$

$u(x,t) = \tilde{f}(t - \frac{x}{c}) = M_0 \cos(\omega(t - \frac{x}{c}) + \alpha_0) = M_0 \cos(\omega t - \frac{\omega}{c}x + \alpha_0) = M_0 \cos(\frac{\omega}{c}x - \omega t + \alpha_0)$

in +x-Richtung laufende harmonische Welle

periodisch in t mit  $\omega T = 2\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$  Periodendauer

periodisch in x  $\Rightarrow kx_p = 2\pi = k \cdot \lambda \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$  Wellenlänge

$c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T}$   $\rightarrow \lambda = cT = \frac{c}{f}$

$f = 50 \text{ kHz} \rightarrow \lambda = 6000 \text{ km}$  Wellenlänge

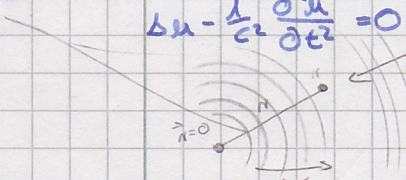
$f = 1 \text{ GHz} \rightarrow \lambda = 0,3 \text{ m} = 30 \text{ cm}$

$f = 60 \text{ GHz} \rightarrow \lambda = 5 \text{ mm}$

Abstand vom Ursprung

1-D-Problem mit  $u(\vec{r},t) = u(r,t) = u(r, \vartheta, \phi, t)$  mit  $\frac{\partial}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \rightarrow$  keine Richtungsabhängigkeit

$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0 \Rightarrow$  Lösung für  $u(r,t) = ?$   
 $\hookrightarrow$  math. Herleitung nicht gezeigt



Ansatz  $u(r,t) = \tilde{f}\left(\frac{t - \frac{r}{c}}{r}\right) + \tilde{g}\left(\frac{t + \frac{r}{c}}{r}\right)$

$\hookrightarrow$  Einsetzen als Beweis

26.06.2014 WH

rot  $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

rot  $\vec{H} = \vec{j}_e + \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\vec{E}(\vec{r},t) \xrightarrow{\text{D.G.}} \vec{H}(\vec{r},t)$   
 $\xrightarrow{\text{I.G.}}$

rot rot  $\vec{E}$  } linear, divergenz

rot rot  $\vec{H}$  } isotrop, nicht divergenz  
 empfindlich für Quellen

$\mu = \epsilon_{x,y,z}$  oder  $\mu_{x,y,z}$  oder ...

$\Delta u - \text{rot rot } \frac{\partial u}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

und  $\text{rot } \vec{D} = 0 \rightarrow \Delta u - \epsilon \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

Strom-Effekt = 0

$\implies \Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$  <sup>3D</sup> Wellengleichung für  $u(\vec{r},t)$  in 3D

$\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$  1D Wellengleichung für  $u(x,t)$  (1D-Fall)

$u(x,t) = \tilde{f}(x-ct) + \tilde{g}(x+ct)$  oder  $u(x,t) = \tilde{f}(t - \frac{x}{c}) + \tilde{g}(t + \frac{x}{c})$  allg. Lösung der 1D-Wellengleichung unter dieser Voraussetzung

$\hookrightarrow$  rechts verlaufend  
 $\hookrightarrow$  links verlaufend

26.07.2014

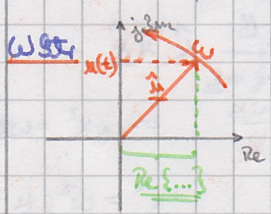
Spezialfall harmonische Abhängigkeit

$u(x,t) = u_0 \cos(\omega(t - \frac{x}{c}) + \alpha_0) = u_0 \cos(\omega t - \frac{\omega}{c}x + \alpha_0) = u_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_0)$

$\omega T_1 = 2\pi \rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$   
 $k\lambda = 2\pi \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$

$\Rightarrow c = \frac{\lambda}{T_1} = \frac{\omega}{k} = \lambda \cdot f$

mit  $k = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$   $\hat{=}$  Wellenzahl (falls verlustlos)



$\Rightarrow u(x,t) = \text{Re}\{u_0 e^{j(\omega t - kx + \alpha_0)}\} = \text{Re}\{u_0 e^{j\alpha_0} e^{-jkx} e^{j\omega t}\}$

ortsabhängige komplexe Amplitude  $u(x) = u_0 e^{j\alpha_0} e^{-jkx}$

$\hookrightarrow$  Feld  $u(x,t)$  aus  $u(x,t) = \text{Re}\{u(x) e^{j\omega t}\}$

komplexe Schreibweise für eine in +x-Richtung laufende harmonische Welle

Projektion auf reelle

nach rechts laufende Welle

$kx = \frac{\omega}{c} \cdot \vec{r}$

258

3D-Fall  $\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$  3D-Fall verlustlos

mit sin/cos  $\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$  --- inklusive Verluste

$u = \text{Re}\{u e^{j\omega t}\}$

$\Rightarrow \Delta u - j\omega \epsilon \mu u - (j\omega)^2 \epsilon \mu u = 0$

inkl. polarisier  $\Delta u + (\omega^2 \epsilon \mu - j\omega \kappa \mu) \cdot u = 0$

inkl. magn. verluste

$\Rightarrow$  komplexe  $\epsilon$  und  $\mu$

$\Rightarrow \Delta u + \frac{(\omega^2 \epsilon \mu - j\omega \kappa \mu)}{k^2} u = 0$  = 3D-Helmholtz-Gleichung

drückt:  $u(\vec{r}) = u_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$  mit  $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$

mit  $k \hat{=}$  komplexe Wellenzahl in [1/m]

$u(\vec{r}, t) = \text{Re}\{u(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\}$

$u(\vec{r}) = u_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}$

$\rightarrow \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^2 \cdot u = 0$

$\hookrightarrow -k_x^2 u - k_y^2 u - k_z^2 u - \frac{1}{c^2} \omega^2 u = 0$

$\Rightarrow$  eine Lösung der 3D-Helmholtzgleichung:  $u(\vec{r}) = u_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$  mit  $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$  falls  $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$

Spezialfall:  $\vec{k} = k \cdot \hat{k}$

neller Einheitsvektor

$\hookrightarrow$  Ausbreitung in Richtung von  $\hat{k}$

$u(\vec{r}) = u_0 e^{-j\vec{k} \cdot \hat{k} \cdot \vec{r}}$  mit  $\|\hat{k}\| = |\hat{k}| = 1$

$u_0 e^{j\alpha_0}$   $k = k' - jk''$

gedämpfte Welle in Richtung von  $\hat{k}$

$u(\vec{r}, t) = \text{Re}\{u_0 e^{j\alpha_0} e^{-j(k' - jk'') \cdot \hat{k} \cdot \vec{r}} e^{j\omega t}\} = u_0 e^{-k'' \cdot \hat{k} \cdot \vec{r}} \cos(\omega t - k' \cdot \hat{k} \cdot \vec{r} + \alpha_0)$

$\hookrightarrow$  Dämpfung

$\hookrightarrow$  verlustlos  $k = k' = k'' = 0$  und  $\hat{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$  Welle in +x-Richtung (ungedämpft)

$\Rightarrow$  allmag. Welle in Richtung  $\hat{k}$ :  $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$

$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$

$\text{rot } \vec{E} = -j \omega \mu \vec{H}$

$\text{rot } \vec{H} = -j \vec{k} \times \vec{E}$

siehe Skizze (30 f)

$\text{rot } \vec{H} = (\sigma + j \omega \epsilon) \vec{E}$

auf der Ball der Quellen  $\rightarrow j \epsilon' \omega \vec{E}$

$\text{rot } \vec{E} = -j \vec{k} \times \vec{H}$

$-j \vec{k} \times \vec{E} = -j \omega \mu \vec{H}$

$\vec{H} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega \mu} = \frac{k}{\omega \mu} \hat{k} \times \vec{E}$

$\text{mit } Z_F = \frac{\omega \mu}{k}$

$\text{mit } Z_F = [Z]$

$\vec{H} = \frac{\hat{k} \times \vec{E}}{Z_F}$

$-j \vec{k} \times \vec{H} = (\sigma + j \omega \epsilon) \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{-j k}{\sigma + j \omega \epsilon} \hat{k} \times \vec{H}$

$\vec{H} \perp \hat{k} \ \& \ \vec{H} \perp \vec{E}$

$\frac{j k}{\sigma + j \omega \epsilon}$

vgl. mit  $\frac{\omega \mu}{k}$

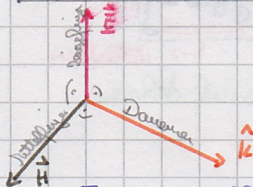
Schleife  $\frac{j k}{\sigma + j \omega \epsilon} = \frac{\omega \mu}{k}$

$\Rightarrow j k^2 = \omega \mu (\sigma + j \omega \epsilon) \Rightarrow j k^2 = \omega \mu \sigma + j \omega^2 \epsilon \mu$

$\vec{E} = -Z_F \hat{k} \times \vec{H}$

$\vec{E} \perp \hat{k} \ \& \ \vec{E} \perp \vec{H}$

$\Rightarrow k^2 = \omega^2 \epsilon \mu - j \omega \sigma \mu$



$\vec{E}$  und  $\vec{H} \perp$  auf der Ausbreitungsrichtung  $\hat{k}$

$\vec{E} \perp \vec{H}$

$\vec{E}, \vec{H}$ -Welle (transversale el. magn. Welle)

Phasenflächen (Punkte gleicher Phase)  $\perp \hat{k}$  & Punkte gleicher Amplitude  $\perp \hat{k}$

jeweils Ebenen  $\perp \hat{k} \Rightarrow$  ebene Wellen Bilder Seite 293

Spezialfall im Vakuum

$\rightarrow Z_F = \frac{\omega \mu_0}{\omega + \epsilon_0 \mu_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$

$= Z_{F_0} \approx 377 \Omega = \frac{\vec{E}_0}{H_0}$

$\left\{ \begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{\mu} \\ H &= \frac{1}{\mu} \end{aligned} \right\} \Rightarrow [Z] = \frac{1}{\mu}$

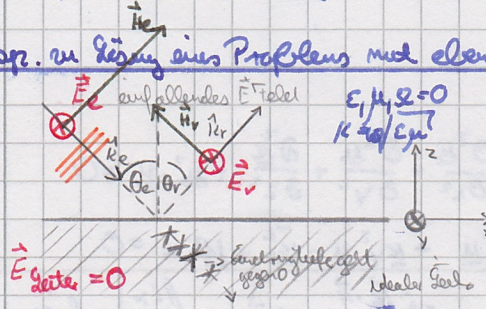
$\hookrightarrow$  im Vakuum

Approximation reeller Wellen als lokal ebener Wellen

$\hat{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $k = k' - j k''$  d.h. bei  $k'' \neq 0$  auch Nahwelle

$u(x, t) = \underline{u}_0 e^{-k'' x} \cos(\omega t - k' x + x_0)$

Bsp. zu Lösung eines Problems mit ebener EM-Welle



$\vec{E}_e(\vec{r}, t) = \hat{y} \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}_e \vec{r} + \alpha_0)$

siehe Bilder darunter

$\vec{E}_{\text{Leiter}} = 0$

gesucht:  $\vec{E}(\vec{r}, t)$   
 $\vec{H}(\vec{r}, t)$  } im gesamten Raum

Lösung im f-Bereich. Bildbereich mit z.B.  $\vec{E}_e(\vec{r}) \Rightarrow \vec{E}_e(\vec{r}) = \hat{y} \vec{E}_0 e^{j(-k_x x + k_z z + \alpha_0)} = \hat{y} \vec{E}_0 e^{j k_x x} e^{j k_z z} e^{j \alpha_0}$

mit  $\vec{k}_e = k \hat{k}_e = k \begin{pmatrix} \sin \theta_e \\ 0 \\ \cos \theta_e \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{E}_e(\vec{r}) = \hat{y} \vec{E}_0 e^{-j k (x \sin \theta_e - z \cos \theta_e)}$  3. simpl. Schreibweise des einfallenden E-Feldes

zuerst  $\theta_r$  unbekannt und  $\vec{E}_r$  bzgl. Amplitude auch unbekannt

$\hookrightarrow \vec{E}_r(\vec{r}) = \hat{y} \vec{R} \cdot \vec{E}_0 e^{-j k (x \sin \theta_r + z \cos \theta_r)}$   $\theta_r$  unbekannt

Gesamtfeld:  $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_e(\vec{r}) + \vec{E}_r(\vec{r})$

$E_{\text{tan}}$  stetig  $\Rightarrow E_{\text{tan}} = 0$  (da Ebene ein idealer Leiter)  $\rightarrow E_y(\vec{r})|_{z=0} = 0$

$\Rightarrow \vec{E}_0 e^{-j k x \sin \theta_e} + \vec{R} \vec{E}_0 e^{-j k x \sin \theta_r} = 0$  1 Gleichung muss aber für bel. x gelten

für beliebige  $x \Rightarrow k \sin \Theta_e = k \sin \Theta_r$

$$\sin \Theta_e = \sin \Theta_r \rightarrow \boxed{\Theta_r = \Theta_e} \rightarrow 1 + \beta = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = -1}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{y} \text{Re} \left\{ E_0 e^{j\omega t} e^{-jk(x \sin \Theta_e - z \cos \Theta_e)} - E_0 e^{j\omega t} e^{-jk(x \sin \Theta_e + z \cos \Theta_e)} \right\} = \hat{y} \text{Re} \left\{ E_0 e^{j\omega t} e^{-jkx \sin \Theta_e} \left( e^{jkz \cos \Theta_e} - e^{-jkz \cos \Theta_e} \right) \right\}$$

$$E(\vec{r}, t) = \hat{y} \underbrace{E_0 \sin(kz \cos \Theta_e)}_{\substack{\text{2. Ordnung (keine } \cos \Theta_e) \\ \text{Le } e^{j\omega t}}} \underbrace{\cos(\omega t - kx \sin \Theta_e + \alpha_0 + \frac{\pi}{2})}_{\text{Ausbreitung}}$$

stehende Welle (überlagert entgegengesetzte Laufener Welle)

für nächstes Bsp.  $\vec{H}_e(\vec{r}) = \frac{E_0}{Z_f} \begin{pmatrix} \cos \Theta_e \\ 0 \\ \sin \Theta_e \end{pmatrix} e^{-jk(x \sin \Theta_e - z \cos \Theta_e)}$

3.2 Bsp 3.2 Auffallendes Feld  $\vec{E}_e(\vec{r}) = \hat{z} E_{e0} e^{-jk_0 x}$  mit  $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c_0}$

reflektierte Welle im Vakuum  $\vec{E}_r(\vec{r}) = \hat{z} E_{r0} e^{+jk_0 x}$

↳ im Vakuum:  $\vec{E}_1(\vec{r}) = \hat{z} (E_{e0} e^{-jk_0 x} + E_{r0} e^{+jk_0 x})$

im Medium ??? - Skin Effekt  $\vec{E}_2(\vec{r}) = (E_{p0} e^{-\gamma x} + E_{r0} e^{+\gamma x}) \hat{z}$  mit  $\gamma = \sqrt{j\omega \epsilon \mu_0} = \frac{1+j}{\delta}$   
da  $\cos \infty \approx \sin \infty \rightarrow \infty$

$\Rightarrow \vec{E}_2(\vec{r}) = \hat{z} E_{p0} e^{-\gamma x}$  2. Unbekannte  
- Nullpunkt

Gleichungen??  $E_{tan}$  stetig bei  $x=0 \Rightarrow \boxed{E_{e0} + E_{r0} = E_{p0}}$  1. Gleichung

weitere Gleichung??  $H_{tan}$  stetig bei  $x=0$  (da  $\vec{j}_f = 0$  wegen unendlicher Eindringtiefe)

$$\vec{H}_1(\vec{r}) = -\hat{y} \left( \frac{E_{e0}}{Z_{f0}} e^{-jk_0 x} + \frac{E_{r0}}{Z_{f0}} e^{+jk_0 x} \right)$$

$$\vec{H}_2(\vec{r}) = ?? \quad \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -j\omega \mu_0 \vec{H} = \text{rot} \vec{E} \Rightarrow \vec{H}_2 = -\frac{\text{rot} \vec{E}_2}{j\omega \mu_0} = -\frac{1}{j\omega \mu_0} \left( -\frac{\partial E_{z2}}{\partial x} \right)$$

$$\rightarrow \vec{H}_2 = \frac{-\gamma}{j\omega \mu_0} E_{p0} e^{-\gamma x} \hat{y}$$

$$\boxed{-\frac{E_{e0}}{Z_{f0}} + \frac{E_{r0}}{Z_{f0}} = \frac{-\gamma}{j\omega \mu_0} E_{p0}}$$
 2. Gleichung

-> Skript

Prüfung -> 2 Wellen oder mehr ansetzen & Grenzbedingungen bestimmen (ideales Leiter)  
nicht ideal -> W. fällt

Ebene Welle im komplexen beschreibt