27.03.14

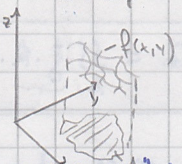
S38 FBW **Bsp. 2.12** $W_{12} = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot R$ => reingesteckte Energie $\int_{C_{12}} (-\vec{F}) \, \vec{ds} = - \int_{C_{12}} \vec{F} \, \vec{ds}$

$$ds = R \cdot d\phi$$

$$= - \int_{C_{12}} (-mg\hat{y}) \cdot \vec{ds} = \int_{C_{12}} mg \, \hat{y} \underbrace{\vec{ds}}_{R d\phi \hat{\phi}} = \int_0^{\pi/2} mg \, \hat{y} \hat{\phi} \, R d\phi = m \cdot g \int_0^{\pi/2} \underbrace{\hat{y} \hat{\phi}}_{1 \cdot 1 \cdot \cos\phi} d\phi = mgR [\sin\phi]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{m \cdot g \cdot R}}$$

Tabelle

S39 **Integral $\iint f(x,y) \underbrace{dy \, dx}_{da}$ oder $\iint f(\rho,\phi) \underbrace{\rho \, d\rho \, d\phi}_{da}$** Bild Seite 39



$\vec{r}$ z.B. (x,y)

$$\boxed{\iint_A f(\vec{r}) \, da = \lim_{\Delta a_i \to 0} \sum \underbrace{f(\vec{r}_i) \, \Delta a_i}_{\hat{=} \text{Volumen}}}$$

$\hat{=}$ Volumen zwischen x-y-Ebene und der Fläche $f(x,y)$ oberhalb der Fläche

← Flächenintegral über skalare Flkt. $f(\vec{r})$ über ebene Fläche A

$$\boxed{\begin{array}{ll} da = dx \, dy & \Rightarrow \iint_A f(x,y) \, dx \, dy \\ da = \rho \, d\rho \, d\phi & \Rightarrow \iint_A f(\rho,\phi) \rho \, d\rho \, d\phi \end{array}}$$

Kartesische S20

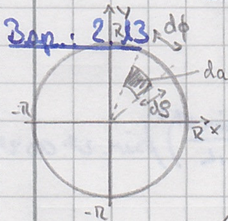
Polar - 320

→ $\boxed{\vec{da} = \rho \, d\rho \, d\phi \, \hat{z}}$ $\hat{=}$ Flächenelement auf Kreis | x-y-Ebene

Spezialfall: $\boxed{f(\vec{r}) = 1: \iint_A da = A}$

$\boxed{\vec{da} = r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\phi \, \hat{r}}$ Flächenelement auf Kugeloberfläche

S41 **Bsp.: 2.13**



$$A = \iint da = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho \, d\rho \, d\phi = \int_0^{2\pi} [\tfrac{1}{2}\rho^2]_0^R \, d\phi = \tfrac{1}{2} R^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} = \underline{\underline{\pi R^2}}$$

mittlere Flächenladungsdichte

Bsp.: 2.15 $\bar{\sigma} = \frac{Q}{A}$ mit $A = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^2}{2}$

$$Q = \iint_A \sigma \, da = \int \int_{-x/2}^{x/2} \frac{2}{3} \sigma_{max} \left(1 + \frac{xy}{a^2}\right) dy \, dx = \frac{2}{3} \sigma_{max} \int_0^a \left[y + \frac{x}{a^2} \frac{y^2}{2} \right]_{-x/2}^{+x/2} dx$$

$$= \frac{2\sigma_{max}}{3a^2} \int_0^a \left[\frac{x}{2} + \cancel{\frac{x^3}{8a^2}} - \left(-\frac{x}{2} + \cancel{\frac{x^3}{8a^2}}\right) \right) dx = \frac{2}{3} \sigma_{max} \int_0^a x \, dx = \frac{2}{3} \sigma_{max} \underbrace{\frac{1}{2} a^2}_{= A} \Rightarrow$$

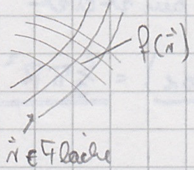
$$\Rightarrow \bar{\sigma} = \frac{Q}{A} = \underline{\underline{\frac{2}{3} \sigma_{max}}}$$

$$d\vec{s} = \hat{e} \, ds$$

01.04.2014 W11 $\boxed{\text{grad} f \cdot \vec{ds} = df}$ → $\boxed{\frac{df}{ds} = \hat{e} \cdot \text{grad} f}$ Richtungsableitung

$\int_C \vec{g} \, \vec{ds}$ $\hat{=}$ Linienintegral ← Raumkurve => $\oint_{\partial A} \vec{g} \, \vec{ds}$ $\hat{=}$ Zirkulation des Vektorfeldes ← Rand von A für $C = \partial A$ $\hat{=}$ geschlossene Kurve

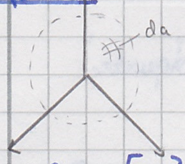
Integration einer skalaren Funktion über gekrümmte Fläche



$\boxed{\iint_A f(\vec{r}) \, da}$ ← auf Zylinder Mantelfläche $da = \rho \, d\phi \, dz$

$da = r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\phi$ falls auf Kugeloberfläche

S44 **Bsp. 2.17**



$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\phi = R^2 \, 2\pi \, [-\cos\vartheta]_0^{\pi} = 2\pi R^2 (-(-1) + 1) = \underline{\underline{2\pi R^2}}$$

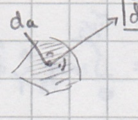
($r = R^2$)

Bsp. 2.18 $[\sigma] = \frac{As}{m^2} = \frac{C}{m^2}$ => $Q = \sum \sigma \Delta a$ → $\iint \sigma \, da$

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0 \sigma_{max} \sin\vartheta \, \frac{1 + \cos^2(\phi/2)}{2} \underbrace{R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\phi}_{da}$$

Integral einer Vektorfunktion $\vec{g}(\vec{r})$ über gekrümmte Fläche

$\oint\!\!\oint_{\partial V} \vec{D}\cdot d\vec{a}$ (skalares Vektorprodukt) oder $\oint\!\!\oint_{\partial V} \vec{B}\cdot d\vec{a}$



$\boxed{\vec{da} = \hat{n}\,da}$ vektorielles Flächenelement

↑ Normaleneinheitsvektor

$\iint \vec{J}\cdot d\vec{a}$

$$\boxed{\iint_A \vec{g}\,\vec{da} = \iint_A \underbrace{\vec{g}\cdot\hat{n}}\cdot da = \iint_A g_n\, da}$$

⇓ Spezialfall: $A = \partial V \mathrel{\hat=}$ Rand des Volumens $V \mathrel{\hat=}$ Hüllfläche

$\boxed{\oint\!\!\oint_{\partial V} \vec{g}\,\vec{da}}$ $\hat=$ Hüllenintegral (meistens Hüllfluss); $\vec{da} = \hat{n}\,da$ mit $\hat{n}$ aus V heraus

947 **Bsp. 2.19**

$$G_1 = \iint_{A_1} \vec{v}\,\vec{da} = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{R} v_z(\varrho)\cdot\overbrace{\underbrace{\hat{z}\cdot\hat{z}}_{1}\,\varrho\,d\varrho\,d\phi}^{\vec{da}} = 2\pi v_0 \int_0^R 1-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\varrho}{R}\right)^2 \varrho\,d\varrho = 2\pi v_0\left[\tfrac{1}{2}\varrho^2 - \tfrac{1}{2R^2}\cdot\tfrac{1}{4}\varrho^4\right]_0^R$$

$$= 2\pi v_0\left(\tfrac{1}{2}R^2 - \tfrac{1}{8}R^2\right) = \tfrac{3}{4}\pi R^2 v_0 = \overbrace{\pi R^2}^{\text{Kreisfläche}}\cdot\tfrac{3}{4}v_0$$

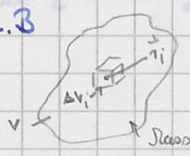
$$G_2 = \iint_{A_2} \vec{v}\,\vec{da} = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi/2} v_z(\varrho)\underbrace{\hat{z}\cdot\hat{r}}_{\cos\vartheta}\cdot R^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\phi = 2\pi v_0 R^2\int_0^{\pi}\left(1-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{R\sin\vartheta}{R}\right)^2\right)\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta$$

$$= 2\pi v_0 R^2\int_0^{\pi/2}\Big(\overbrace{\sin\vartheta\cos\vartheta}^{\frac{1}{2}\sin^2\vartheta} - \overbrace{\tfrac{1}{2}\sin^3\vartheta\cos\vartheta}^{\frac{1}{4}\sin^4\vartheta}\Big)d\vartheta = 2\pi v_0 R^2\left[\sin^2\vartheta - \tfrac{1}{8}\sin^4\vartheta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \tfrac{3}{4}\pi R^2 v_0 = G_1$$

Volumenintegral über skalare Fkt

z.B



→ Gesamtmasse: $m = \underbrace{\sum_i \varrho_M(\vec{r}_i)\,\Delta v_i}_{\Delta v_i \to 0}$ → $m = \iiint_V \varrho_M\, dv$

$\boxed{\iiint_V f(r)\,dv}$ z.B $f \mathrel{\hat=} \eta \mathrel{\hat=}$ Raumladungsdichte (in $\frac{C}{m^3}$) $\qquad \boxed{\iiint_V dv = V}$

↳ $\iiint \eta\, dv \mathrel{\hat=}$ Ladung

Bsp. 2.22

<u>Volumen</u> $V = \iiint_V dv = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\alpha}\!\!\int_0^{R} r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\phi = 2\pi\int_0^R r^2 dr\int_0^{\alpha}\sin\vartheta\,d\vartheta$

$$= 2\pi\tfrac{1}{3}R^3\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\alpha} = \tfrac{2}{3}\pi R^3(1-\cos\alpha) = \tfrac{2}{3}\pi R^2\cdot\underbrace{R(1-\cos\alpha)}_{h} = \underline{\tfrac{2}{3}\pi R^2 h}$$

952 **Bsp. 2.23**

$\varrho_m(\vec{r}) = \varrho_{max}\left(1-\tfrac{1}{2}\tfrac{r}{R}\sin\vartheta\right)$ maximal für $\vartheta = 0$ bzw. $\vartheta = \pi$ ⇒ auf der z-Achse

minimal für $\vartheta = \pi/2$ und $r = R$ ⇒ "auf Äquator"

$$\to \varrho_{min} = \varrho_{max}\left(1-\tfrac{1}{2}\tfrac{R}{R}\sin 90°\right) = \tfrac{1}{2}\varrho_{max}$$

$$m = \iiint_V \varrho_m\,dv = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{R} \varrho_{max}\left(1-\tfrac{1}{2}\tfrac{r}{R}\sin\vartheta\right)r^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\phi = 2\pi\varrho_{max}\int_0^{\pi}\left[\int_0^R r^2 - \tfrac{1}{2}\tfrac{r^3}{R}\sin\vartheta)\,dr\right]\sin\vartheta\,d\vartheta$$

$$= 2\pi\varrho_{max}R^3\int_0^{\pi}\Big(\tfrac{1}{3}\sin\vartheta - \underbrace{\tfrac{1}{8}\sin^2\vartheta}_{\frac{1}{16}(1-\cos 2\vartheta)}\Big)d\vartheta = 2\pi\varrho_{max}R^3\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{\pi}{16}+\tfrac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\tfrac{4}{3}\pi R^3\varrho_{max}\left(1-\tfrac{3}{32}\pi\right)}}$$

2014.04.01

FBW **2.6 Integralsatz**

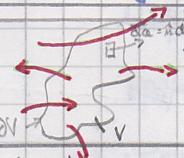
Vektordifferentialoperation (grad, div, rot)

$$f(x) = \int \frac{df}{dx}\,dx = \int f'(x)\,dx \qquad \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx \text{ mit } f(x) = \frac{dF}{dx} = F'(x)$$

$$f(x) = \int \left\{ f''(x)\,dx \right\} dx$$

① Integrationsordnung erhöhen -> geeignet gewählte Ableitung nötig

Hüllintegral $\underbrace{\oint\!\!\oint_{\partial V} \vec{g}\,d\vec{a}}_{\text{Skalar}} = \iiint_V \underbrace{\operatorname{div}\vec{g}}_{\text{Skalar}}\,dv$ ← ist geeignet zu wählen ← Gaußscher Integralsatz



nach außen

∂V = Rand -> = Oberfläche

für kleine Volumen

$\Rightarrow$ kleine V ($V \to 0$) $\Rightarrow \oint\!\!\oint_V \vec{g}\,d\vec{a} \approx \operatorname{div}\vec{g}\,V$

Skalar, abhängig von ($\vec{r}$)

$\to \boxed{\operatorname{div}(g) = \operatorname{div}\vec{g} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oint\!\!\oint_{\partial V} g \cdot da}$ diff. der Divergenz

Feld -> Feld, aber immer von Ort abhängig

$\boxed{\oint\!\!\oint_{\partial V} \vec{g}\,d\vec{a}}$ $\hat{=}$ Quellenstärke im Volumen V
$> 0 \to$ Quelle in V; $< 0 \to$ Senke in V

-> Quellenstärke pro Volumen $\iiint \operatorname{div}\vec{g}\,dv$

Divergenz $\hat{=}$ Quellenstärke (in V) bezogen auf Volumen V $\hat{=}$ **Quellendichte** am Ort $\vec{r}$ und für $V \to 0$

Berechnungsvorschrift in kartesischen Koordinaten ← V-Quader $\qquad \underbrace{\Delta x \Delta y \Delta z}_{\text{kleines } V} \to 0$

$$\oint\!\!\oint_{\partial V} \vec{g}\,d\vec{a} = g_z(x_m, y_m, z_0 + \Delta z)\,\Delta x \Delta y - g_z(x_m, y_0, z_0)\,\Delta x \Delta y + g_x(x_0 + \Delta x, y_m, z_m)\,\Delta y \Delta z - \dots$$

$$\frac{1}{V} \oint\!\!\oint_{\partial V} \vec{g}\,d\vec{a} = \frac{g_z(x_m, y_m, z_0 + \Delta z) - g_z(x_m, y_m, z_0)}{\Delta z} + \dots \frac{g_x(x_0 + \Delta x, y_m, z_m)\,\Delta y \Delta z}{\Delta x} + \dots$$

$\uparrow$
$\Delta x \Delta y \Delta z$

$$\to \lim_{\substack{V \to 0 \\ \Delta x \to 0,\, \Delta y \to 0,\, \Delta z \to 0}} \frac{1}{V} \oint\!\!\oint_{\partial V} \vec{g}\,d\vec{a} = \left.\frac{\partial g_z}{\partial z}\right|_{x_m, y_m, z_0} + \left.\frac{\partial g_x}{\partial x}\right|_{y_m, z_m, x_0} + \left.\frac{\partial g_y}{\partial y}\right|_{x_m, y_0, z_m}$$

$$\operatorname{div}(g(x,y,z)) = \operatorname{div}\vec{g}\Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = \left.\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}$$

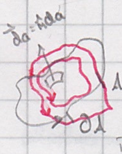
S. 55 $\boxed{\underbrace{\operatorname{div}\underbrace{\vec{g}}_{\text{Vektorfeld}}\Big|_{(x,y,z)}}_{\text{Skalar}} = \left.\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}\right|_{(x,y,z)}}$ Divergenz in kartesischen Koordinaten
$\hat{=}$ Quellenstärke pro Volumen

-> in kartesischen Koordinaten andere KO-Systeme in Skript oder Fosa

$\operatorname{div}\vec{g}\,\Big|$ Zylinderkoordinaten siehe Aufgabensammlung

$\operatorname{div}\vec{g}\,\Big|$ Kugelkoordinaten => Beispiel 2.24

②



Umlauf des Randes

Integrieren über Fläche

Zirkulation $\boxed{\underbrace{\oint_{\partial A} \vec{g}\,d\vec{s}}_{\text{Skalar}} = \iint_A \overset{\text{geeignet gewählt}}{\overbrace{\underbrace{\operatorname{rot}\vec{g}}_{\text{Vektorfeld}}}} \cdot d\vec{a}}$ Satz von Stokes

-> Wirbelstärke / Fläche

$\hat{=}$ Zirkulation
$\hat{=}$ Wirbelstärke auf A (Vektorfläche) $= \oint_{\partial A} \vec{g}\,d\vec{s}$

$\Rightarrow$ kleine $A \Rightarrow \oint_{\partial A} \vec{g}\,d\vec{s} \approx \operatorname{rot}\vec{g} \cdot \hat{n} \cdot A$

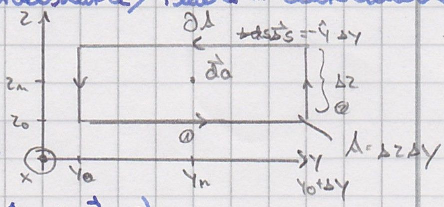
Def. der Rotation (hier n-Komponente)

$\Rightarrow \boxed{\hat{n} \operatorname{rot}\vec{g} = (\operatorname{rot}\vec{g})_n = \lim_{A \to 0} \oint_{\partial A} \vec{g}\,d\vec{s}}$ Komponente z.B. x, y, z

Wirbelstärke / Fläche $\hat{=}$ Wirbeldichte = Rotation (auf Ort)

$$(\operatorname{rot}\vec{g})_x = \hat{x} \operatorname{rot}\vec{g} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \oint_{\partial A} \vec{g}\,d\vec{s}$$

$\uparrow$ A parallel zur yz-Ebene



2.3 $\oint \vec{E}\,d\vec{s} = 0$ in Statik $\hat{=}$ Maschensatz -> Wirbelfreies Feld ($\hat{=}$ $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$)

① ②

$$\oint_{\partial A} \vec g\, d\vec s = g_y(x_0,y_m,z_0)\Delta y + g_z(x_0,y_0+\Delta y,z_m)\Delta z - g_y(x_0,y_m,z_0+\Delta z)\Delta y - g_z(x_0,y_0,z_m)\Delta z$$

$$\frac{1}{A}\oint \vec g\, d\vec s = \frac{g_z(x_0,y_0+\Delta y,z_m)-g_z(x_0,y_0,z_m)}{\Delta y} - \frac{g_y(x_0,y_m,z_0+\Delta z)-g_y(x_0,y_m,z_0)}{\Delta z}$$

$\downarrow \Delta y \to 0,\ \Delta z \to 0$

§53

$$\boxed{(\text{rot}\,\vec g)_x\Big|_{(x,y,z)} = \frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z}\Big|_{(x,y,z)}}$$

! Rotation ist ein Vektorielles Ergebnis

$$\boxed{\text{rot}\,\vec g = \hat x\left(\frac{\partial g_z}{\partial y}-\frac{\partial g_y}{\partial z}\right)+\hat y\left(\frac{\partial g_x}{\partial z}-\frac{\partial g_z}{\partial x}\right)+\hat z\left(\frac{\partial g_y}{\partial x}-\frac{\partial g_x}{\partial y}\right)}$$

Beachte:

Vektorfeld $\xrightarrow[\text{div}]{\text{Divergenz}}$ Skalarfeld

Vektorfeld $\xrightarrow[\text{rot}]{\text{Rotation}}$ Vektorfeld

Skalarfeld $\xrightarrow[\text{grad}]{\text{Gradient}}$ Skal. Vektorfeld

§61 **Gradient und Linienintegral**

$f(\vec r)$ sei bekannt

$df = \text{grad}\, f\, d\vec s$

$$\boxed{\int_{\vec r_a}^{\vec r_b} \underbrace{\text{grad}\, f\, d\vec s}_{df} = \sum \Delta f_i = f(\vec r_b) - f(\vec r_a)}$$

$$\boxed{f(\vec r_b) = f(\vec r_a) + \int_{\vec r_a}^{\vec r_b} \text{grad}(f)\cdot d\vec s}$$ → unabhängig vom Weg (Gebirge → Höhe)

03.04.2014

$\boxed{\oint_{\partial A} \text{grad}\, f \cdot d\vec s = 0}$ → grad f ist wirbelfrei

∂A → geschlossener Umlauf → Anfangspunkt = Endpunkt

$$\boxed{\text{grad}\, f = \hat x\frac{\partial f}{\partial x} + \hat y\frac{\partial f}{\partial y} + \hat z\frac{\partial f}{\partial z}}$$

§62 **Kurzschreibweise für grad, div und rot**

$$\boxed{\vec\nabla \mathrel{\hat=} \nabla = \hat x\frac{\partial}{\partial x} + \hat y\frac{\partial}{\partial y} + \hat z\frac{\partial}{\partial z} \mathrel{\hat=} \begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{pmatrix}}$$ Nabla-Operator →

$$\boxed{\begin{aligned}\text{grad}(f) &= \vec\nabla f \mathrel{\hat=} \nabla f\\ \text{div}(g) &= \vec\nabla\cdot g = \nabla\cdot g\\ \text{rot}(g) &= \vec\nabla\times g = \nabla\times g\end{aligned}}$$ → Skalarprodukt

$$\text{rot}(g) = \vec\nabla\times g = \nabla\times g \mathrel{\hat=} \begin{vmatrix}\hat x & \hat y & \hat z\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ g_x & g_y & g_z\end{vmatrix}$$

Kombinierte Operationen

$\text{grad}(\text{div}\,\vec g) = \nabla(\nabla\cdot\vec g)$

$\text{div}(\text{grad}\, f) = \nabla\cdot(\nabla f)$

$\text{div}(\text{rot}\,\vec g) = \nabla\cdot(\nabla\times\vec g) \equiv 0$ ← $\text{rot}(\vec g) = \nabla\times\vec g$ ist quellenfrei

$\text{rot}(\text{grad}\, f) = \nabla\times(\nabla f) \equiv 0$ ← $\text{grad}(f) = \nabla f$ ist wirbelfrei

an allen Punkten

$\text{rot}(\text{rot}\,\vec g) = \nabla\times(\nabla\times\vec g)$

Skalarpotential

Wirbelfrei

$\text{rot}\,\vec g \equiv 0$ → es existiert $f(\vec r)$ mit $\boxed{\vec g = \text{grad}\, f}$

Lösung unter Umständen einfacher

Vektorpotential

$\text{div}\,\vec g \equiv 0$ → es existiert $\vec k(\vec r)$ mit $\boxed{\vec g = \text{rot}\,\vec k}$

Quellenfrei