

$$\oint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{s} = g_y(x_0, y_0, z_0) \Delta y + g_z(x_0, y_0, z_0) \Delta z - g_y(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) \Delta y - g_z(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) \Delta x$$

$$\frac{1}{\Delta x} \oint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{s} = \frac{g_z(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - g_z(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y} - \frac{g_y(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - g_y(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}$$

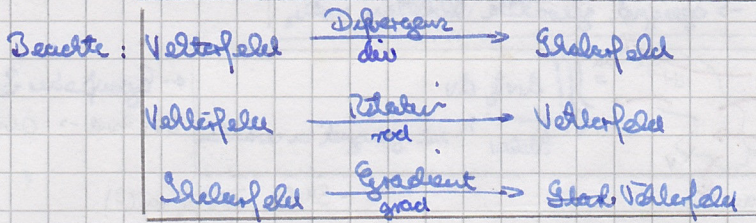
$$\downarrow \Delta y \rightarrow 0$$

$$\downarrow \Delta z \rightarrow 0$$

$$\left(\text{rot } \vec{g} \right)_x \Big|_{(x, y, z)} = \frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} \Big|_{(x, y, z)}$$

! Rotieren ist ein Vektorielles Ergebnis

$$\text{rot } \vec{g} = \hat{x} \left(\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial g_x}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \right)$$



§61 Gradient und Linienintegral

$$df = \text{grad } f \cdot d\vec{s}$$

$$\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \text{grad } f \cdot d\vec{s} = \sum \Delta f_i = f(\vec{r}_b) - f(\vec{r}_a)$$

$f(\vec{r})$ ist bekannt

$$f(\vec{r}_b) = f(\vec{r}_a) + \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \text{grad } f \cdot d\vec{s} \rightarrow \text{unabhängig von Weg (Gebirge} \rightarrow \text{Bähe)}$$

$$\oint \text{grad } f \cdot d\vec{s} = 0 \rightarrow \text{grad } f \text{ ist wirbelfrei}$$

$\Delta \rightarrow$ geschlossener Verlauf \rightarrow Differenzpunkt = Endpunkt

$$\text{grad } f = \hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z}$$

§62 Skalarprodukt für grad, div und rot

$$\vec{\nabla} \hat{=} \nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \hat{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Hilfs-Operator $\rightarrow \text{grad}(f) = \vec{\nabla} f \hat{=} \nabla f$

$$\text{div}(\vec{g}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = \nabla \cdot \vec{g} \rightarrow \text{Skalarprodukt}$$

$$\text{rot}(\vec{g}) = \vec{\nabla} \times \vec{g} = \nabla \times \vec{g} \hat{=} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix}$$

$$\text{rot}(\vec{g}) = \vec{\nabla} \times \vec{g} = \nabla \times \vec{g}$$

§63 Identische Operationen

$$\text{grad}(\text{div } \vec{g}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{g})$$

$$\text{div}(\text{grad } f) = \nabla \cdot (\nabla f)$$

$$\text{div}(\text{rot } \vec{g}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{g}) \hat{=} 0 \leftarrow \text{rot}(\vec{g}) = \nabla \times \vec{g} \text{ ist quellenfrei}$$

$$\text{rot}(\text{grad } f) = \nabla \times (\nabla f) \hat{=} 0 \leftarrow \text{grad}(f) = \nabla f \text{ ist wirbelfrei}$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{g}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{g})$$

Wirbelfrei \rightarrow es existiert $f(\vec{r})$ mit $\vec{g} = \text{grad } f$

Skalarpotential

Lösung unter bestimmten Umständen

Quellenfrei \rightarrow es existiert $\vec{h}(\vec{r})$ mit $\vec{g} = \text{rot } \vec{h}$

Vektorpotential

FBW Elektrostatik (E-Statik) ← Quellenfeld

$\vec{E}(\vec{r}, t) \leftarrow$ Quellen- und Wirbelfeld

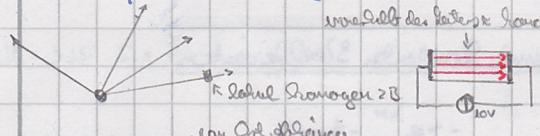
} siehe später

Magnetostatik ← Wirbelfeld

565 Bsp. 2.26 $\vec{g}(\vec{r}) = \vec{g}(x, y, z) = 2\hat{x} + 3\hat{y} + \hat{z}$

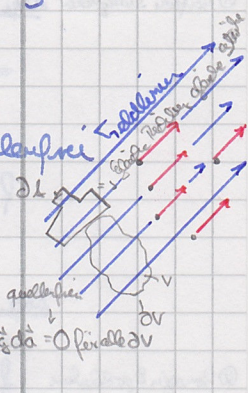
Quellenfrei $\rightarrow \text{div } \vec{g} \equiv 0 \rightarrow \text{div } \vec{g} = \frac{\partial 2}{\partial x} + \frac{\partial 3}{\partial y} + \frac{\partial 1}{\partial z} = 0 \checkmark \Rightarrow$ Feld ist Quellenfrei

Wirbelfrei $\rightarrow \text{rot } \vec{g} = \hat{x} \cdot 0 + \hat{y} \cdot 0 + \hat{z} \cdot 0 = \vec{0} = 0 \Rightarrow$ Feld ist wirbelfrei



$\oint_{\partial \Delta} \vec{g} \cdot d\vec{s} = 0$ für alle $\partial \Delta$

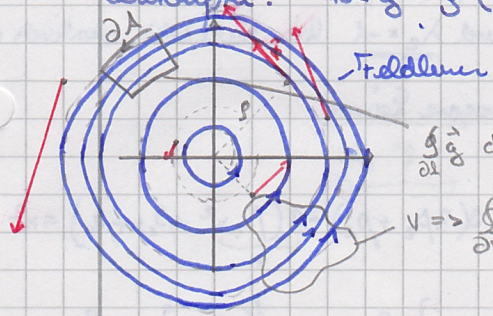
\Rightarrow homogenes Feld



566 Bsp. 2.27 $\vec{g}(\vec{r}) = (\rho, \phi, z) = \rho \hat{\phi}$

Quellenfrei $\rightarrow \text{div } \vec{g} = \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho g_\phi)}{d\phi} = \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho^2)}{d\phi} = 0 \rightarrow$ Quellenfrei

Wirbelfrei? $\rightarrow \text{rot } \vec{g} = \hat{\phi} \left(-\frac{d g_\phi}{dz} \right) + \hat{z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho g_\phi) = \hat{\phi} \cdot 0 + \hat{z} \frac{1}{\rho} \cdot 2\rho = \hat{z} \cdot 2 \rightarrow$ wirbelbehaftet



$\oint_{\partial \Delta} \vec{g} \cdot d\vec{s} \neq 0$

$\forall \Rightarrow \oint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{a} = 0$ für alle $\partial V =$ Quellenfrei

567 div (grad f) = ??

Laplace Operator

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \Delta f$$

568 rot (rot g) und grad (div g) = ?

$\text{rot}(\text{rot } \vec{g}) = \text{grad}(\text{div } \vec{g}) - \Delta \vec{g}$

siehe (a) alle Komponenten

$\nabla \times (\nabla \times \vec{g}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{g}) - \Delta \vec{g}$

569 Bsp. 2.29 $\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) = \text{div}(\text{grad } f) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d f}{d\phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)$
 $= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{d f}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ q.e.d

570 Bsp. 2.31 $f(\vec{r}) = f(x, y, z) = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ oder z.B. $f(\vec{r}) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f(x, y, z)$
 Sphärische Koordinaten
 $\text{grad}(r) = \hat{r} \frac{\partial r}{\partial r} + \hat{\theta} \cdot 0 + \hat{\phi} \cdot 0 = \hat{r}$
 $\text{grad}(\frac{1}{r}) = \hat{r} \frac{\partial (\frac{1}{r})}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \hat{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2}$
 $\text{grad}(r) = \text{grad} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \hat{x} \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \dots = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$
 zirkulär

Sphärische Koordinaten
 graden!

$\text{grad}(\frac{1}{r}) = \hat{r} \frac{\partial (\frac{1}{r})}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \hat{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2}$

$\text{grad} \frac{1}{r} = \text{grad} \frac{1}{|\vec{r}|} \Rightarrow \text{grad} \frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}|^3}$

Nachführung des ganzen Vektorfeldes

siehe Bsp. 2.33 und Feld einer Punktladung

2.7 Lösung von (partiellen) Differentialgleichungen

1.1. Integration
 1.2. Integration
 1.3. Integration
 1.4. Integration
 1.5. Integration
 1.6. Integration
 1.7. Integration
 1.8. Integration
 1.9. Integration
 1.10. Integration
 1.11. Integration
 1.12. Integration
 1.13. Integration
 1.14. Integration
 1.15. Integration
 1.16. Integration
 1.17. Integration
 1.18. Integration
 1.19. Integration
 1.20. Integration
 1.21. Integration
 1.22. Integration
 1.23. Integration
 1.24. Integration
 1.25. Integration
 1.26. Integration
 1.27. Integration
 1.28. Integration
 1.29. Integration
 1.30. Integration
 1.31. Integration
 1.32. Integration
 1.33. Integration
 1.34. Integration
 1.35. Integration
 1.36. Integration
 1.37. Integration
 1.38. Integration
 1.39. Integration
 1.40. Integration
 1.41. Integration
 1.42. Integration
 1.43. Integration
 1.44. Integration
 1.45. Integration
 1.46. Integration
 1.47. Integration
 1.48. Integration
 1.49. Integration
 1.50. Integration
 1.51. Integration
 1.52. Integration
 1.53. Integration
 1.54. Integration
 1.55. Integration
 1.56. Integration
 1.57. Integration
 1.58. Integration
 1.59. Integration
 1.60. Integration
 1.61. Integration
 1.62. Integration
 1.63. Integration
 1.64. Integration
 1.65. Integration
 1.66. Integration
 1.67. Integration
 1.68. Integration
 1.69. Integration
 1.70. Integration
 1.71. Integration
 1.72. Integration
 1.73. Integration
 1.74. Integration
 1.75. Integration
 1.76. Integration
 1.77. Integration
 1.78. Integration
 1.79. Integration
 1.80. Integration
 1.81. Integration
 1.82. Integration
 1.83. Integration
 1.84. Integration
 1.85. Integration
 1.86. Integration
 1.87. Integration
 1.88. Integration
 1.89. Integration
 1.90. Integration
 1.91. Integration
 1.92. Integration
 1.93. Integration
 1.94. Integration
 1.95. Integration
 1.96. Integration
 1.97. Integration
 1.98. Integration
 1.99. Integration
 2.00. Integration

$f(0) = 5 = C_2$ $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=1} = 3 = 4 \cdot \frac{1}{2} + C_1 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow \underline{f(x) = 4x - 2 \ln(x+1) + 5}$
 für $0 \leq x \leq 1$

2.36 $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = x^2$ lineare DGL mit konstanten Koeffizienten z.B. RLC-Netzwerk

$f(x) = f_p(x) + f_h(x) \rightarrow e^{\lambda x}$ -Ansatz
 partikuläre Lösung erfüllt DGL für x^2 homogene Lösung erfüllt DGL für rechte Seite = 0

homogene Lösung: $\lambda^2 e^{\lambda x} + 3\lambda e^{\lambda x} + 2e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 = \text{Charakteristische Gl.}$
 (Komplexe reelle)
 $\lambda_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} \Rightarrow \lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -1$ hier reelle, reelle Eigenwerte

$\Rightarrow f_h(x) = A_1 e^{-2x} + A_2 e^{-x}$ = allgemeine homogene Lösung
 A_1, A_2 aus Randbedingungen

partikuläre Lösung $\Rightarrow f_p(x) = \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0 = 2\beta_2 + 3(2\beta_2 + \beta_1) + 2(\beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0) = x^2$
 $\rightarrow \beta_2 = \frac{1}{2}$ $\rightarrow 1 + 3\beta_1 + 2\beta_0 = 0$ $\beta_0 = \frac{3}{4}$
 $3 + 2\beta_1 = 0 \rightarrow \beta_1 = -\frac{3}{2}$ } $f_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} + A_1 e^{-2x} + A_2 e^{-x}$ = allgemeine Lösung
 A_1, A_2 aus Randbedingungen

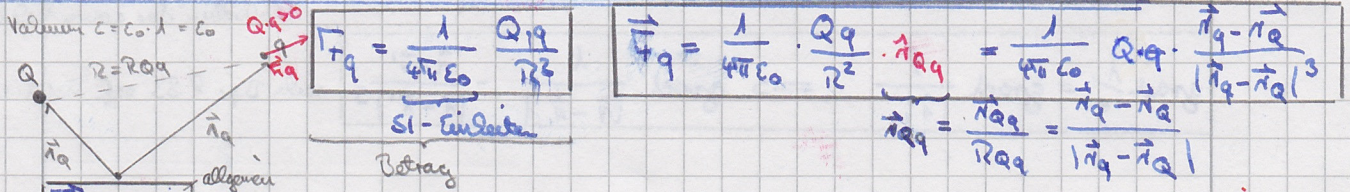
$f(0) = 0 \rightarrow \frac{3}{4} + A_1 + A_2 = 0 \rightarrow A_1 = \frac{-\frac{3}{4} e^{-2} - A_2}{e^{-2} - 2e^{-4}}$
 $f'(0) = 0 \rightarrow 2 - \frac{3}{2} - 2A_1 e^{-4} - A_2 e^{-2} = 0$

Separationsansatz

$\Delta f = 0 \xrightarrow{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow f(x) = Ax + B$
 $\Delta f = 0 \xrightarrow{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0} \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial g} \left(g \frac{df}{dg} \right) = 0 \Rightarrow g \frac{df}{dg} = C_1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial g} = \frac{C_1}{g} \Rightarrow f(g) = C_1 \ln g + C_2$
 $\Delta f = 0 \xrightarrow{\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) = 0 \Rightarrow f(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$

Das elektrostatische Feld (Elektrostatik)

Coulombgesetz in Vektorform

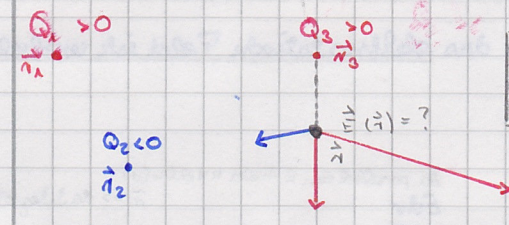


$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_q(\vec{r})}{q}$

$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \vec{n}_{qQ}$ el. Feldstärke $\hat{=}$ Kraft auf Probeladung / Probeladung \leftarrow Def gilt allgemein
 für Probeladung im Vakuum \leftarrow spezielle Probeladung

$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{n} - \vec{n}_Q}{|\vec{n} - \vec{n}_Q|^3}$ el. Feld einer Punktladung Q $[\vec{E}] = \frac{V}{m} = \frac{N}{As} = \frac{g/m}{As} = \frac{Vg/m}{As} = \frac{V}{m}$

Statik: "E-Feld von \oplus nach \ominus "



$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Superposition

3.5 Die elektrische Flussdichte \vec{D} in $\frac{As}{m^2}$

$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$ falls linear & isotrop $\vec{D} \propto \vec{E}$

falls das Medium linear und isotrop (Richtungsunabhängig)

\hookrightarrow mit $\epsilon_r \geq 1 \rightarrow |\vec{E}_{\text{Material}}| < |\vec{E}_{\text{Vakuum}}|$ für gegebene Ladungen

$\vec{D} \propto \vec{E} \Rightarrow$ nicht linear (z. Stoff) $\vec{D} \not\propto \vec{E} \Rightarrow$ anisotrop (z. Stoff) \leftarrow Vorzugsrichtung (z. B. Kristalle)

ohne Materie $\Rightarrow \vec{E}_Q = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0}$ (stellt sich im Vakuum ein)

mit Materie $\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_a + \vec{E}_i = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$ $\Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}(\vec{E})$

Polarisierung

alignieren
Polarisieren durch äußere Felder
 \rightarrow keine durchschlag mehr möglich

\vec{P} bel. Richtung \rightarrow anisotrop ($\vec{D} \not\propto \vec{E}$)
 \hookrightarrow ggf. nichtlinear

falls linear aber z. B. anisotrop $\vec{P} = \epsilon_0 \underline{\underline{\chi}} \cdot \vec{E}$ $\Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \underline{\underline{\chi}} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{E}$

Tensor

falls Wechselfelder bzw. zeitabh. Felder

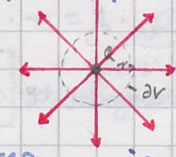
$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_0 \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \vec{E}(\vec{r}', t') d\vec{r}' dt'$$

komplex $\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{r}, \omega) \cdot \vec{E}(\vec{r}, \omega)$ im \vec{r} -frequenzbereich für Materie mit Gedächtnis (dispersive Materie)

Bsp.: Wasser: $\epsilon_r (f < 1 \text{ kHz}) \approx 80$; $\epsilon_r (f \approx 200 \text{ GHz}) \approx 5$; $\epsilon_r (\text{Gleit}) \approx 2$

Quadrupolmoment

$$\vec{D} \stackrel{!}{=} \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \hat{r}$$



$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot 4\pi r^2$$

3.6 Das Gaußsche Satz der Elektrostatik Satz vom Quellenfluss $\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_V \hat{=} \text{Ladung im Volumen } V$

Bsp. 33: $V \hat{=} \text{Kugel mit Radius } r \rightarrow \vec{D} \perp \partial V \Rightarrow \vec{D} \parallel d\vec{a} \Rightarrow \vec{D} \cdot d\vec{a} = D da$ und $D = \text{const auf } \partial V$

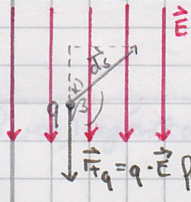
$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{a} = \oint_{\partial V} D da = D \oint_{\partial V} da = D \cdot A = D \cdot 4\pi r^2 = Q$$

Flussdichte $\vec{D}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \hat{r} \rightarrow$ konstant auf Kugeloberfläche $\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{D}(\vec{r})}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$

$\frac{1}{\epsilon}$ in Luft
 $\frac{1}{\epsilon}$ in Glas

\hookrightarrow maximaler Wert (Oberfläche) der Bleimotstaffeldstärke

3.7 Elektrostatistisches Potential φ und Spannung U



$dW_q \hat{=} \text{Änderung der pot. Energie} \rightarrow$ nur Beträge $dW_q = \vec{F}_q \cdot d\vec{s} \cos \alpha = F_q ds \cos(\pi - \beta)$

$\Rightarrow dW_q = -\vec{F}_q \cdot d\vec{s} = -F_q ds \cos(\beta)$

$\vec{F}_q = q \cdot \vec{E}$ für $q > 0$

Def.: Potential $\varphi(\vec{r}) = \frac{W_q(\vec{r})}{q}$ in $\frac{Vs}{C} = \frac{Vs}{As} = V \rightarrow d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$

$\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_B) = \int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}} d\varphi = -\int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_B) - \int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$

$\varphi(\vec{r}_2) = \varphi(\vec{r}_1) - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \rightarrow$ Spannung $U_{12}: U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$

d.h. $dU = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$