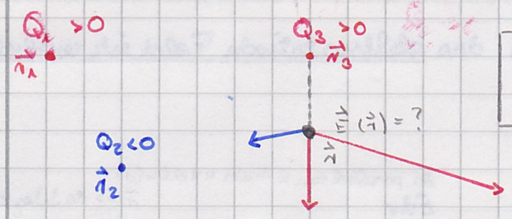
03.04.2014
FBW



$$\boxed{\vec E(\vec r) = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec r-\vec r_i}{|\vec r-\vec r_i|^3}}$$ Superposition

10.04.2014

33 **3.5 Die elektrische Flussdichte $\vec D$ in $\frac{As}{m^2}$**

$\boxed{\vec D = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec E = \varepsilon \vec E}$ ← falls linear & isotrop

$D \sim E$ $\vec D \parallel \vec E$

falls das Medium linear und isotrop (Richtungsunabhängig)

↳ mit $\varepsilon_r \geq 1$ -> $|\vec E_{Materie}| < |\vec E_{Vakuum}|$ für gegebene Ladungen

$D \nsim E$ => nicht linear (a. Stoff) $\vec D \nparallel \vec E$ => anisotrop (a. Stoff) ← Vorzugsrichtung (z.B. Kristalle)

ohne Materie => $\vec E_a = \frac{\vec D}{\varepsilon_0}$ (stellt sich im Vakuum ein)

mit Materie => $\vec E = \vec E_a + \vec E_i = \frac{\vec D}{\varepsilon_0} - \frac{\vec P}{\varepsilon_0}$ ← Polarisation => $\boxed{\vec D = \varepsilon_0 \vec E + \vec P(\vec E)}$ ← allgemein

Polarisation kann Sättigung haben -> keine Ausrichtung mehr möglich

↳ ggf. nichtlinear

$\vec P$ bel. Richtung -> anisotrop ($\vec D \nparallel \vec E$)

Tensor

falls linear aber z.B. anisotrop $\vec P = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\chi} \cdot \vec E$ => $\boxed{\vec D = \varepsilon_0 \vec E + \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\chi}\cdot\vec E = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\varepsilon_r}\cdot\vec E}$

$1+\overleftrightarrow{\chi}$

Permittivitätstensor

| falls Wechselfelder bzw. zeitabh. Felder

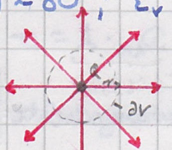
$$\vec D(\vec r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\varepsilon_r}(\vec r, \tau)\, \vec E(\vec r, t-\tau)\, d\tau$$ Faltung

komplexe $\boxed{\underline{\vec D}(\vec r, \omega) = \varepsilon_0 \underline{\overleftrightarrow{\varepsilon_r}}(\vec r, \omega) \cdot \underline{\vec E}(\vec r, \omega)}$ im Frequenzbereich für Materie mit Gedächtnis (dispersive Materie)

Bsp.: Wasser: $\varepsilon_r(f < 1\,kHz) \approx 80$; $\varepsilon_r(f \approx 200\,GHz) \approx 5$; $\varepsilon_r(\text{Licht}) \approx 2$

Q im Ursprung

$\vec D \stackrel{!}{=} \frac{Q}{4\pi r^2}\cdot\hat r$



$$\oint_{\partial V} \vec D\, d\vec a = \overbrace{\frac{Q}{4\pi r^2}}^{\vec D} 4\pi r^2$$

§38 **3.6 Der Gaußsche Satz der Elektrostatik** Satz vom Hüllenfluss $\boxed{\oint_{\partial V} \vec D\, d\vec a = Q_V}$ ≙ Ladung im Volumen V

1. Gesetz der Elektrostatik

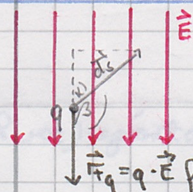
100 Bsp. 33. V ≙ Kugel mit Radius r -> $\vec D \perp \partial V$ (senkrecht auf Oberfläche) => $\vec D \parallel d\vec a$ (immer ⊥ auf Oberfläche) => $\vec D\, d\vec a = D\, da$ und $D = const$ auf ∂V

$$\oint_{\partial V} \vec D\, d\vec a = \oint_{\partial V} D\, da = D \oint_{\partial V} da = D\cdot A = D\, 4\pi r^2 = Q$$

Flussdichte $\vec D(\vec r) = \frac{Q}{4\pi r^2}\cdot\hat r$ (zeigt radial nach außen) -> Maximum auf Metalloberfläche => $\vec E(\vec r) = \frac{\vec D(\vec r)}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat r \cdot \begin{cases} \frac{1}{5} \text{ in Schwefel} \\ 1 \text{ in Luft} \end{cases}$

↳ maximum direkt halb (Oberfläche) der Kunststoffschicht

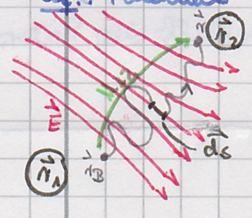
102 **3.7 Elektrostatisches Potential φ und Spannung U**



dW_q ≙ Änderung der pot. Energie -> nur Beträge $dW_q = F_q\, ds \cos\alpha = F_q\, ds \cos(\pi - \beta)$

=> $dW_q = -\vec F_q\, d\vec s$ $= -F_q\, ds \cos(\beta)$

Def.: Potential $\boxed{\varphi(\vec r) = \frac{W_q(\vec r)}{q}}$ in $\frac{J}{C} = \frac{VAs}{As} = V$ -> $\boxed{d\varphi = -\vec E\, d\vec s}$



$\varphi(\vec r) - \varphi(\vec r_B) = \int d\varphi = -\int_{\vec r_B}^{\vec r} \vec E\, d\vec s$ => $\boxed{\varphi(\vec r) = \varphi(\vec r_B) - \int_{\vec r_B}^{\vec r} \vec E\, d\vec s}$

$\varphi(\vec r_2) = \varphi(\vec r_1) - \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec E\, d\vec s$ -> Spannung U_{12}: $\boxed{U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec E\, d\vec s}$

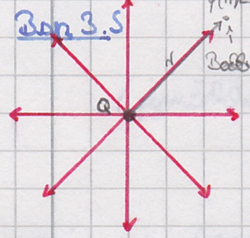
d.h. $\boxed{dU = \vec E\cdot d\vec s}$

2. Gesetz der Elektrostatik

=> $\boxed{\oint_{\partial A} \vec{E}\,\vec{ds} = 0}$ entspricht Maschensatz => hier: das elektrostatische Feld ist wirbelfrei

$\oint_{\partial V} \underbrace{\vec{F}_q}_{q\cdot\vec{E}} \vec{ds} = 0 \;\longrightarrow\; \hat{=}$ Energieerhaltung

105 Bsp 3.5



da parallel zum E-Feld ‖ Vektor (r)

$\tilde{r}$ => da Integrationsgrenze; r -> verschieden

$$U_{r\infty} = \varphi(r) - \underbrace{\varphi(\infty)}_{=0} = \int_r^\infty \overbrace{\vec{E}\,\vec{ds}}^{E\,dr} = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \tilde{r}^2}\, d\tilde{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\tilde{r}}\right]_r^\infty = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

↳ falls Ladung Q bei $\vec{r}_Q$ und in lin. isotropen Medium mit $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \underbrace{\varepsilon_0\varepsilon_r}_{\varepsilon} \,|\vec{r} - \vec{r}_Q|}}$$

Grundgesetze der Elektrostatik

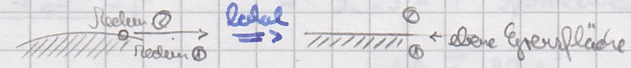
$\boxed{\oiint_{\partial V} \vec{D}\,\vec{da} = Q_V}$ mit $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\varepsilon_r \cdot \vec{E}}$ falls linear und $\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$ falls auch isotrop

$\boxed{\oint_{\partial A} \vec{E}\,\vec{ds} = 0}$

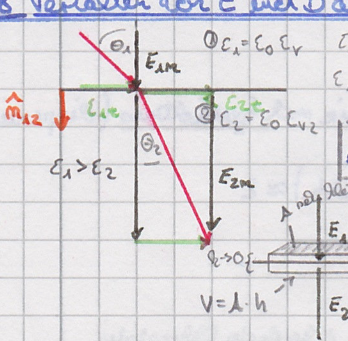
2 der 4 Maxwell Gl. (bei Statik)

Bild S. 106 $d\varphi = \vec{E}\,\vec{ds} = 0$ falls $\vec{E} \perp \vec{ds}$ => Äquipotentiallinien

Grenzbedingung:



S111 3.8 Verhalten von $\vec{E}$ und $\vec{D}$ an der ebenen Grenze zwischen 2 Medien



ε_{1t} = Tangentiale Komponente

ε_{1n} = Normale Komponente

$h \to 0$; E_{1t}; E_{2t}; l; $A = l \cdot h$

Spannungen müssen gleich sein

$$\oint_{\partial A} \vec{E}\,\vec{ds} = E_{2t}\, l - E_{1t}\, l = 0$$

$\boxed{E_{1t} = E_{2t}}$ Stetigkeit des tang. el. Feldes

$$\oint_{\partial V} \vec{D}\,\vec{da} = \underbrace{D_{2n}\cdot A}_{\hat{n} \uparrow\uparrow E_{2n} \to +} - \underbrace{D_{1n}\cdot A}_{\hat{n} \uparrow\downarrow E_{1n}} = \sigma \cdot A \;\hat{=}\; Q_V$$

ggf. Ladung σ -> Flächenladungsdichte $\boxed{\sigma = \frac{dQ}{da}}$ in $\frac{C}{m^2}$

falls $\sigma = 0$ -> D_n = stetig

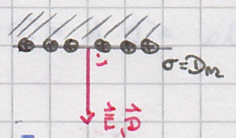
$\boxed{D_{2n} = D_{1n} \text{ falls } \sigma = 0 \;\; \to D_{2n} = D_{1n} + \sigma}$

$\hat{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \mathrm{Rot}\,\vec{E} = 0$ Sprungrotation

$\hat{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \mathrm{Div}\,\vec{D} = \sigma$ Sprungdivergenz

$\sigma \neq 0$ nur an metallischen Oberflächen

Spezialfall: a) ① $\hat{=}$ Metall



② $\hat{=}$ diel. Material

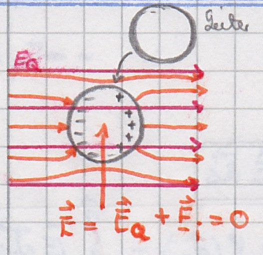
= $\boxed{E_{2t} = 0 \qquad D_{2n} = \sigma}$ $\vec{E} \perp$ Metall; Flächenladungen auf Metalloberfl.

b) ① & ② nicht Metall

$$\frac{\tan\Theta_2}{\tan\Theta_1} = \frac{E_{2t}/E_{2n}}{E_{1t}/E_{2n}} \overset{E_t = 0}{=} \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{D_{1n}/\varepsilon_1}{D_{2n}/\varepsilon_2} \overset{D_{1n}=D_{2n}}{=} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \;\to\; \boxed{\frac{\tan\Theta_2}{\tan\Theta_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

falls $\sigma = 0$ & linear & isotrop

3.9 Leiter im el. Feld (Influenz, Abschirmung)



Influenz:
- Verschiebung frei beweglicher Ladungsträger (im Leiter)
- Verzerrung des äußeren Feldes
- Verschiebung bis $\vec{F}_q = q\cdot\vec{E} = 0$ => $\vec{E} = 0$ innerhalb des Leiters
- Ladungen auf Leiteroberfläche

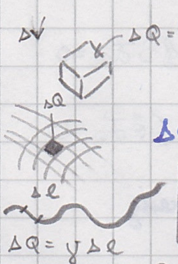
3.10 Übersicht von Feldbildern in Elektrostatik

Siehe Blatt in $\boxed{S115}$

10.04.14

FuW 116 3.11 Übergang auf kontinuierliche Ladungsverteilung — Makroskopische Feldtheorie

Kleine Elementarladungen einzeln betrachtet



$\rightarrow \boxed{\eta = \frac{\Delta Q}{\Delta V}}$ in $\frac{C}{m^3}$ Raumladungsdichte "$\eta = \frac{dQ}{dV}$" ← Vorsicht darf man nicht so lösen mach

$\Delta Q = \sigma \Delta a \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta a}}$ in $\frac{C}{m^2}$ Flächenladungsdichte "$\sigma = \frac{dQ}{da}$"

$\boxed{\gamma = \frac{\Delta Q}{\Delta l}}$ in $\frac{C}{m}$ Linienladungsdichte

also ggf. darunterlegen! -> ersetzen

so interpretieren z.B. S.119 & "112" ← Allgemeine Formel

Punktladung, Volumenladung, Flächenladung, Linienladung

$$Q_v = \sum Q_i + \underbrace{\iiint \eta\, dv}_{\text{nur dieser Term explizit geschrieben}} + \iint \sigma\, da + \int \gamma\, dl \Rightarrow \text{Gaußscher Satz: } \boxed{\oint_{\partial V} \vec{D}\cdot d\vec{a} = \iiint_V \eta\, dv}$$

r' - Ort der Ursache, r = Beobachtungspunkt

wie aus Gaußschen Satz auf Punktladung?

$\Rightarrow Q_i \rightarrow \eta(x', y', z') = Q_i\, \delta(x'-x_i)\, \delta(y'-y_i)\, \delta(z'-z_i)$

$$\iiint \eta\, dv' = \iiint Q_i\, \underbrace{\delta(x'-x_i)}_{*\to 1}\, \underbrace{\delta(y'-y_i)}_{*\to 1}\, \underbrace{\delta(z'-z_i)}_{*\to 1}\, \underbrace{dx'dy'dz'}_{dv'} = \underline{\underline{Q_i}} \quad \text{mit } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, dt = 1 \; *$$

15.04.2014 WH **Grundgesetze der E-Statik**

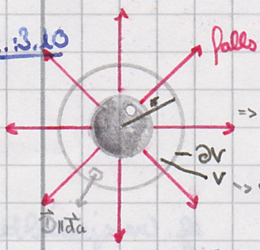
Polarisation — allgemeiner Fall — linear + isotrop

$\boxed{\oint_{\partial V} \vec{D}\, d\vec{a} = Q_v}$ $\quad \boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\varepsilon_r} \vec{E}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ $\quad \boxed{E_{2t} = E_{1t}}$

$\boxed{\oint_{\partial V} \vec{E}\, d\vec{s} = 0}$ $\quad \boxed{u_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\, d\vec{s}}$ $\quad$ -> Grenzbedingung: $\boxed{D_{2n} = D_{1n} + \sigma}$ mit $\sigma = \frac{dQ}{da}$ in $\frac{C}{m^2}$

$\eta = \frac{dQ}{dV}$; $\sigma = \frac{dQ}{da}$; $\gamma = \frac{dQ}{dl} = \frac{dQ}{ds}$ $\rightarrow Q_v = \iiint_V \eta\, dv \rightarrow \boxed{\oint_V \vec{D}\, d\vec{a} = \iiint_V \eta\, dv = Q_v}$

Bsp. 3.10



falls $\varepsilon_r = const$; $\eta = 0$

$\vec{E}(\vec{r}) = ??? \Rightarrow \underline{\vec{E}(\vec{r}) = 0 \text{ für } r < R}$ (da elektrischer Leiter; innerhalb)

$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\, \hat{r}$

Satz vom Hüllfluss: $\oint_{\partial V} \vec{D}\, d\vec{a} = Q_v$ mit $\vec{D} \parallel d\vec{a} \rightarrow \vec{D}\, d\vec{a} = D\, da$

$\rightarrow V = \frac{4}{3}\pi r^3$ -> Kugelsymmetrie auf für $\varepsilon_r(r)$ und $\eta(r)$ -> V und ∂V geeignet wählen -> hier Kugel

$dv = 4\pi r^2\, dr$ ← für dünne Schicht

$$D = const \text{ auf } \partial V \Rightarrow \oint_{\partial V} \vec{D}\, d\vec{a} = \oint_{\partial V} D\, da = D \oint da = D \cdot 4\pi r^2 = D_r\, 4\pi r^2 = Q_v = Q + \iiint_V \eta\, dv = Q + \int_R^r 4\pi r'^2 \eta(r')\, dr'$$

$$E_r(r) = \frac{D_r(r)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r(r)} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r(r)\, r^2} \left[Q + \int_R^r 4\pi r'^2\, \eta(r')\, dr' \right] \quad \text{für } r > R$$

andere Möglichkeit über $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_R^r \eta\, r'^2 \sin\vartheta\, dr'\, d\vartheta\, d\phi$

122 **Bsp. 3.13** $\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{\eta(\vec{r}\,')\, (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon\, |\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\, dv'$ ≙ Summe über Feld unendlich vieler Punktladungen

← Gesetz von Coulomb -> vgl. $\vec{F}_q(\vec{r}) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_Q)}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3}$ $\rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_q(\vec{r})}{q}$

$\eta\, dv' \Rightarrow \gamma_0\, dz'$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_0}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|r - r'|}\, dz' \quad \Rightarrow \text{Symmetrie} \rightarrow \vec{r} = \rho \cdot \hat{\rho} \;;\; \vec{r}\,' = z' \hat{z} \quad d\alpha\rho = 0$$

da kein Betrag im Integral

$$= \frac{\gamma_0}{4\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho\hat{\rho} - z'\hat{z}}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}^{\,3}} = \hat{\rho} \frac{\gamma_0}{4\pi\varepsilon} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}^{\,3}} = \hat{\rho} \frac{\gamma_0 \rho}{4\pi\varepsilon} \left[\frac{z'}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + z'^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \hat{\rho} \frac{\gamma_0}{4\pi\varepsilon\rho} \left[1 - (-1) \right] =$$

$$\underline{\underline{\vec{E}(\vec{r}) = \hat{\rho} \cdot \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{\rho}}}$$

andere Möglichkeit: $\oint_{\partial V} \vec{D}\, d\vec{a} = Q_v \Rightarrow D_\rho\, 2\pi\rho\, l = \gamma_0 \cdot l \rightarrow E_\rho(\rho) = \frac{D_\rho(\rho)}{\varepsilon} = \underline{\underline{\frac{\gamma_0}{2\pi\varepsilon\rho}}}$