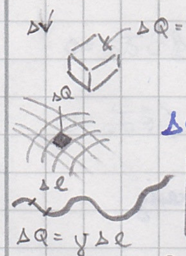
10.04.14

FuW 116 **3.11 Übergang auf kontinuierliche Ladungsverteilung** — **Makroskopische Feldtheorie**

Kleine Elementarladungen einzeln betrachtet



$\to \boxed{\eta = \frac{\Delta Q}{\Delta V}}$ in $\frac{C}{m^3}$ Raumladungsdichte "$\eta = \frac{dQ}{dV}$" ← Vorsicht darf man nicht so klein machen

$\Delta Q = \sigma\, \Delta a \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta a}}$ in $\frac{C}{m^2}$ Flächenladungsdichte "$\sigma = \frac{dQ}{da}$"

$\boxed{\gamma = \frac{\Delta Q}{\Delta l}}$ in $\frac{C}{m}$ Linienladungsdichte

also ggf. darunterlegen! → ersetzen

so interpretieren z.B. S. 119 & "117" ← Allgemeine Formel

Punktladung, Volumenladung, Flächenladung, Linienladung

$$Q_V = \sum Q_i + \underbrace{\iiint \eta\, dv}_{\text{nur dieser Term explizit geschrieben}} + \iint \sigma\, da + \int \gamma\, dl \Rightarrow \text{Gaußscher Satz: } \boxed{\oint_{\partial V} \vec{D}\cdot d\vec{a} = \iiint_V \eta\, dv}$$

r' = Ort der Ursache, r = Beobachtungspunkt

wie aus Gaußschem Satz auf Punktladung?

$$\Rightarrow Q_i \to \eta(x', y', z') = Q_i\, \delta(x' - x_i)\, \delta(y' - y_i)\, \delta(z' - z_i)$$

$$\iiint \eta\, dv' = \iiint Q_i\, \underbrace{\delta(x' - x_i)}_{* \to 1}\, \underbrace{\delta(y' - y_i)}_{* \to 1}\, \underbrace{\delta(z' - z_i)}_{* \to 1}\, \underbrace{dx'\, dy'\, dz'}_{dv'} = Q_i \quad \text{mit } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)\, dt = 1 \; *$$

15.04.2014 WH **Grundgesetze der E-Statik**

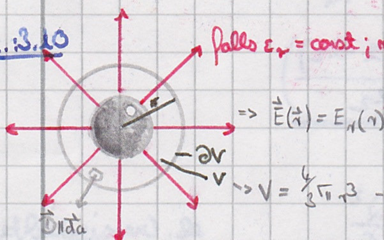
Polarisation — linearer Fall — linear + isotrop

$$\boxed{\begin{aligned} \oint_{\partial V} \vec{D}\, d\vec{a} &= Q_V \\ \oint_{\partial V} \vec{E}\, d\vec{s} &= 0 \end{aligned}} \qquad \boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\varepsilon_r} \vec{E}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

$$\boxed{U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\, d\vec{s}} \to \text{Grenzbedingung: } \boxed{\begin{aligned} E_{2t} &= E_{1t} \\ D_{2n} &= D_{1n} + \sigma \end{aligned}} \text{ mit } \sigma = \frac{dQ}{da} \text{ in } \frac{C}{m^2}$$

$$\eta = \frac{dQ}{dV}\; ; \; \sigma = \frac{dQ}{da}\; ; \; \gamma = \frac{dQ}{dl} = \frac{dQ}{ds} \to Q_V = \iiint_V \eta\, dv \to \boxed{\oint_V \vec{D}\, d\vec{a} = \iiint_V \eta\, dv = Q_V}$$

Bsp. 3.10



da statischer Fall

$\vec{E}(\vec{r}) = ??? \Rightarrow \underline{\vec{E}(\vec{r}) = 0 \text{ für } r < R}$ innerhalb

$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\, \hat{r}$

Satz vom Hüllfluss: $\oint_{\partial V} \vec{D}\, d\vec{a} = Q_V$ mit $\vec{D} \parallel d\vec{a} \to \vec{D}\, d\vec{a} = D\, da$

$\to V = \frac{4}{3}\pi r^3 \to$ Kugelsymmetrie auf für $\varepsilon_r(r)$ und $\eta(r)$ → V und ∂V geeignet wählen → hier Kugel

$dv = 4\pi r^2\, dr$ ← Schalendünne Schicht

$$D = const \text{ auf } \partial V \Rightarrow \oint_{\partial V} \vec{D}\, d\vec{a} = \oint_{\partial V} D\, da = D \oint da = D \cdot 4\pi r^2 = D_r\, 4\pi r^2 = Q_V = Q + \iiint_V \eta\, dv = Q + \int_R^r 4\pi r'^2\, \eta(r')\, dr'$$

$$\underline{E_r(r) = \frac{D_r(r)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r(r)} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r(r)\, r^2} \left[Q + \int_R^r 4\pi r'^2\, \eta(r')\, dr' \right]} \quad \text{für } r > R$$

andere Möglichkeit über $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_R^r \eta\, r'^2 \sin\vartheta\, dr'\, d\vartheta\, d\phi$

122 Bsp. 3.13 $\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{\eta(\vec{r}')\,(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\varepsilon\, |\vec{r} - \vec{r}'|^3}\, dv' \;\hat{=}\;$ Summe über Feld unendlich vieler Punktladungen

↖ Gesetz von Coulomb → vgl. $\vec{F}_q(\vec{r}) = \frac{Q q}{4\pi\varepsilon} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_Q)}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3} \to \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_q(\vec{r})}{q}$

$\eta\, dv' \Rightarrow \gamma_0\, dz'$

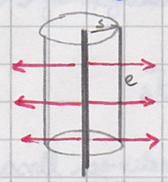
$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_0}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, dz' \Rightarrow \text{Symmetrie} \to \vec{r} = \rho \cdot \hat{\rho}\; ; \; \vec{r}' = z'\hat{z} \; \text{ da } \rho = 0$$

da kein Betrag im Integralen

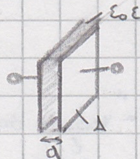
$$= \frac{\gamma_0}{4\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho\hat{\rho} - z'\hat{z}}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}^{\,3}} = \hat{\rho} \frac{\gamma_0}{4\pi\varepsilon} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}^{\,3}} = \hat{\rho} \frac{\gamma_0 \rho}{4\pi\varepsilon} \left[\frac{z'}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + z'^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \hat{\rho} \frac{\gamma_0}{4\pi\varepsilon\rho} \left[1 - (-1) \right] =$$

$$\underline{\vec{E}(\vec{r}) = \hat{\rho} \cdot \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{\rho}}$$

andere Möglichkeit: $\oint_{\partial V} \vec{D}\, d\vec{a} = Q_V \Rightarrow D_\rho\, 2\pi\rho\, l = \gamma_0 \cdot l \to E_\rho(\rho) = \frac{D_\rho(\rho)}{\varepsilon} = \underline{\frac{\gamma_0}{2\pi\varepsilon\rho}}$



123 **3.12 Kondensator und Kapazität** $\pm Q, U \Rightarrow \boxed{C = \frac{Q}{U}}$ $C = f(\text{Geometrie, Materie})$



$\boxed{C = \varepsilon \frac{A}{d}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d}$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} U = E \cdot d \\ Q = D \cdot A \end{array} \right. \rightarrow \frac{Q}{U} = \frac{D \cdot A}{E \cdot d} = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$

C berechnen?
$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ Q \text{ vorgegeben} \Rightarrow \vec{D} \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow U \Rightarrow C \\ 2)\ U \text{ vorgegeben} \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow \vec{D} \Rightarrow Q \Rightarrow C \end{array}}$$
$\leftarrow \oiint \vec{D}\, d\vec{a} = 0$

$\leftarrow \int \vec{E}\, d\vec{s} = 0$

128 **Bsp. 3.16** C' in $\frac{pF}{m}$ $\rightarrow$ 1) oder 2)? $\rightarrow$ 1) Variante, da $\int \vec{E}\, d\vec{s} = U \rightarrow \vec{E}$ schwierig

Zylindersymmetrie $= \partial V \mathrel{\hat=}$ Zylindermantelfläche $2\pi \varrho l$ $\Rightarrow \oiint_{\partial V} \vec{D}\, d\vec{a} = Q_V \Rightarrow D_\varrho\, 2\pi \varrho l = Q$

$$\Rightarrow D_\varrho = \frac{Q}{l} \cdot \frac{1}{2\pi\varrho}$$

$$\vec{E}(\varrho) = \hat{\varrho}\, \frac{D_\varrho(\varrho)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r(\varrho)} = \hat{\varrho}\, \frac{Q/l}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r(\varrho)} \cdot \frac{1}{\varrho}$$

$$U = \int_{\text{innen}}^{\text{außen}} \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{Q/l}{2\pi\varepsilon_0} \left(\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{1}{\varepsilon_{r1}\varrho}\, d\varrho + \int_{\varrho_2}^{\varrho_3} \frac{1}{\varepsilon_{r2}\varrho}\, d\varrho + \int_{\varrho_3}^{\varrho_4} \frac{1}{\varepsilon_{r3}\varrho}\, d\varrho \right) = \frac{Q/l}{2\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}} \ln\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) + \frac{1}{\varepsilon_{r2}} \ln\left(\frac{\varrho_3}{\varrho_2}\right) + \frac{1}{\varepsilon_{r3}} \ln\left(\frac{\varrho_4}{\varrho_3}\right) \right)$$

$$C' = \frac{C}{l} = \frac{Q}{U l} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{\varepsilon_{r1}} \ln\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) + \ldots + \frac{1}{\varepsilon_{r3}} \ln\left(\frac{\varrho_4}{\varrho_3}\right)}$$

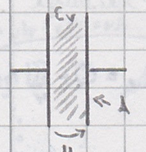
130 **Bsp. 3.18** vgl. 3.13 für Leiter $x = 0 \rightarrow E(\varrho) = \frac{Q/l}{2\pi\varepsilon_0 \varrho}$ und Bsp. 3.16

$\vec{E}\, d\vec{s} = E\, \hat{x}\, dx$

$$U = \int_{R_1}^{d-R_2} E_x(x)\, dx = \int_{R_1}^{d-R_2} \left(\frac{Q/l}{2\pi\varepsilon_0 x} + \frac{Q/l}{2\pi\varepsilon_0 (d-x)} \right) dx = \frac{Q/l}{2\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{d-R_2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-d} \right) dx$$

$$= \frac{Q/l}{2\pi\varepsilon_0} \left(\ln\left(\frac{d-R_2}{R_1}\right) - \ln\left(\frac{d-R_2-d}{R_1-d}\right) \right) = \frac{Q/l}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{(d-R_1)(d-R_2)}{R_1 R_2} \right)$$

133 **3.13 Energie und Energiedichte**

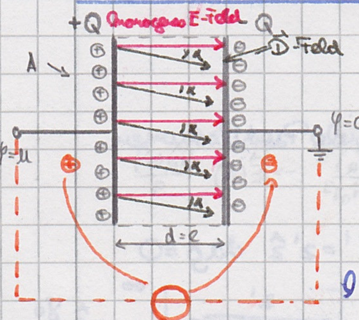


$\rightarrow$ elektrische Feldenergie

linear & isotrop $\rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2} C \cdot U^2} = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ el. Energiedichte

$$w_e = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \frac{A}{d} \cdot U^2}{A d} = \frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{U}{d}\right)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \quad \rightarrow \boxed{w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2} = \frac{1}{2} D \cdot E = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\varepsilon} \text{ in } \frac{J}{m^3}$$

Falls nichtlinear und anisotrop ???



$\int \vec{E}\, d\vec{s} = U \Rightarrow E \cdot d = U$ $\qquad D_n = \sigma = \frac{Q}{A} \Leftrightarrow D_n A = Q$

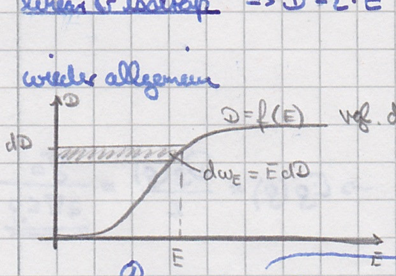
$D_n = D \cos\alpha$; $w_q = \varphi \cdot q$; $U dQ = dW$; $dw_e = \frac{dW}{V} = \underbrace{\frac{U}{d}}_{E} \frac{dQ}{A} = E\, dD_n$

$E D_n = \vec{E} \vec{D}$ $\rightarrow \boxed{dw_e = \vec{E} \cdot d\vec{D}}$ Transport der Ladungsmenge (Energiedichte ändern)

linear & isotrop $\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$ $\rightarrow d\vec{D} = \varepsilon\, d\vec{E}$ $\rightarrow dw_e = \vec{E}\, d\vec{D} = \varepsilon \vec{E}\, d\vec{E} = \varepsilon E dE$ $\rightarrow w_e = \int \varepsilon E dE = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$

wieder allgemein

nicht linear aber isotrop: $dw_e = E\, dD$



Integralform der Gleichungen: Nützlich falls ausgeprägte Symmetrie

bisher: ① $\oiint_{\partial V} \vec{D}\, d\vec{a} = \iiint \eta\, dv$ ② $\oint \vec{E}\, d\vec{s} = 0$ ③ $U = \int \vec{E}\, d\vec{s}$

① $\rightarrow$ Gauß $= \iiint \operatorname{div} \vec{D}\, dv \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \eta}$ lokale Form des Gesetzes, dass Ladungen Ursache von $\vec{D}$ bzw. $\vec{E}$ sind

② => $\oint\oint_A \text{rot}\,\vec{E}\,d\vec{a}$ => $\boxed{\text{rot}\,\vec{E} = 0}$ elektrostatisches Feld ist wirbelfrei (lokale Form)

↳ es existiert $\varphi(\vec{r})$ mit $\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi$

$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = \text{grad}\,\varphi\, d\vec{s} = -\vec{E}\,d\vec{s}$ —> $\boxed{\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi}$

$\text{div}\,\vec{D} = \eta$ Ziel: $\underset{\text{Skalarfeld}}{\varphi(\vec{r})}$ berechnen, dadurch auch $\underset{\text{Vektorfeld}}{\vec{E}(\vec{r})}$ bekannt

$\text{rot}\,\vec{E} = 0 \xrightarrow{\text{deshalb}} \vec{E} = -\text{grad}\,\varphi \xrightarrow[\vec{D} = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\varepsilon_r} \vec{E} \text{ linear!!!}]{\text{deshalb}} \text{div}\,(\varepsilon_0 \overleftrightarrow{\varepsilon_r}(-\text{grad}\,\varphi)) = \eta$

$-\varepsilon_0\, \text{div}\,(\vec{\varepsilon}_r\, \text{grad}\,\varphi) = \eta$

Skalarprodukt

$$\boxed{\begin{aligned} \text{div}\,(\vec{\varepsilon}_r \cdot \text{grad}\,\varphi) &= -\eta/\varepsilon_0 \\ \nabla \cdot (\overleftrightarrow{\varepsilon_r} \cdot \nabla\varphi) &= -\eta/\varepsilon_0 \end{aligned}}$$

auch inhomogen (d.h. $\overleftrightarrow{\varepsilon_r}(\vec{r})$) und auch anisotrop

↳ in der Regel nur numerisch lösbar

(stückweise) homogen und isotrop

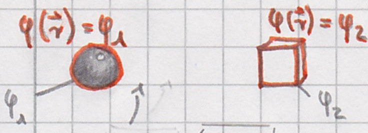
$\overleftrightarrow{\varepsilon_r} \to \varepsilon_r$

$\varepsilon_r(\vec{r}) \to \varepsilon_r$

} keine Ortsabhängigkeit (weggelassen) $\to \varepsilon_r \nabla \cdot \nabla \cdot \varphi = -\eta/\varepsilon_0 \Rightarrow \nabla \cdot \nabla\varphi = -\frac{\eta}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 z} = -\frac{\eta}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$ $\to \boxed{\Delta\varphi = -\frac{\eta}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}$ Poisson-Gleichung

$\eta = 0$ ↳ $\Delta\varphi = 0$ Laplace Gleichung



$\varepsilon = \text{const}$ (linear, isotrop & homogen)

$\Delta\varphi = 0$ DGL $\eta = 0$ Bedingung auf Rand des Berechnungsgebietes

Randwertproblem —> $\boxed{\text{Randbedingung}}$

klassische Randbedingung: $\boxed{\varphi(\vec{r}) = g(\vec{r})}$ für $\vec{r} \in \partial G$ Dirichlet-Bedingung

∂G $\boxed{\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\vec{r}} = g(\vec{r})}$ für $\vec{r} \in \partial G$ —> Neumann Bedingung

$\hat{n} \cdot \text{grad}\,\varphi = -E_n$

Bsp. 3.22

$\varphi(r) = -\frac{\eta_0}{6\varepsilon} r^2$ für $r < R$ ← $\varphi(0) = 0$

innerhalb $r < R$: $\Delta\varphi = -\frac{\eta_0}{\varepsilon}$ => $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = -\frac{\eta_0}{\varepsilon}$ => $r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{\eta_0}{3\varepsilon}r^3 + C_1$

außerhalb $r > R$: $\Delta\varphi = 0$ => $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = 0$ => $r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \tilde{C}_1$ => $\varphi = \frac{\tilde{C}_1}{r} - \tilde{C}_2$

Kugelkoordinaten —> symmetrien —> $\frac{\partial}{\partial\vartheta} = \frac{\partial}{\partial\phi} = 0$ für $r > R$

=> Potential φ stetig $\varphi(R^-) = \varphi(R^+)$

I)① $-\frac{\eta_0}{6\varepsilon}r^2 = -\frac{\tilde{C}_1}{R} + \tilde{C}_2$