24.04.2014

147 FBW

Bsp. 3.23 $\varphi(\vec{r}) \overset{\text{Symmetrie}}{=} \varphi(\rho)$ ← hängt nur vom Abstand ab

Zyl. Koordinaten ⇒ $\Delta\varphi = \frac{\eta}{\varepsilon}$; $\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ $\Rightarrow \underline{\underline{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) = 0}}$

zu lösende DGL

$$\Rightarrow \rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = F \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = \frac{F}{\rho} \Rightarrow \varphi = F\ln|\rho| + G = F\ln\rho + G$$

$$\varphi(\rho) = \begin{cases} \underline{\underline{F_1}}\ln\rho + \underline{\underline{G_1}} & \text{für Gebiet 1} \\ \underline{\underline{F_2}}\ln\rho + \underline{\underline{G_2}} & \text{für Gebiet 2} \end{cases} \quad \text{Gesucht}$$

$\varphi(R_i) = \varphi_i \Rightarrow F_1 \ln R_i + G_1 = \varphi_i$ (1)

$\varphi(R_a) = \varphi_a \Rightarrow F_2 \ln R_a + G_2 = \varphi_a$ (2)

$\varphi(R_m^-) = \varphi(R_m^+) \Rightarrow F_1 \ln R_m + G_1 = F_2 \ln R_m + G_2$ (3)

$\sigma = 0 \Rightarrow D_{2n} = D_{1n} \Rightarrow D_\rho(R_m^-) = D(R_m^+) \Rightarrow \varepsilon_0\varepsilon_{r1}\underbrace{\left(+\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_{R_m^-}}_{F_1/R_m} = \varepsilon_0\varepsilon_{r2}\underbrace{\left(+\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)_{R_m^+}}_{F_2/R_m}$

$\Rightarrow \varepsilon_{r1}\frac{F_1}{R_m} = \varepsilon_{r2}\frac{F_2}{R_m}$ (4)

Elektrostatik: ruhende Ladung

157

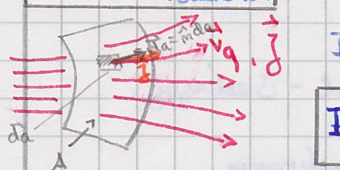
4 Das stationäre elektrische Strömungsfeld

Gleichstromlehre: Ladungen bewegen sich mit einer mittleren Geschwindigkeit ($\vec{v}_q$)

→ Driftgeschwindigkeit

stationäres Strömungsfeld

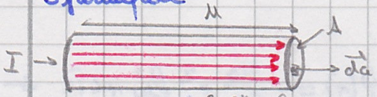
$\boxed{I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\Big|_{\text{durch }A}}$ $\xleftarrow{\partial/\partial t = 0}$ allg. $i(t) = \frac{dQ}{dt}\Big|_{\text{durch }A}$



I durch da hindurch ??? → $\boxed{dI = \vec{J}\cdot\vec{da}} = \vec{J}\,\hat{n}\cdot da = J_n\,da$

$$\boxed{I_A = \iint_A dI = \iint_A \vec{J}\cdot\vec{da}}$$

Spezialfall



$\Rightarrow I = J\cdot A$

hängt zusammen

$I \Leftrightarrow \vec{J}$ $\quad u = R\cdot I \Rightarrow u \sim I$ bzw. $\vec{J} \sim \vec{E}$

$u \Leftrightarrow \vec{E}$ $\quad \vec{E} \sim \vec{J}$

S163 → $\varkappa \neq f(\omega)$ → $\boxed{\vec{J} = \varkappa\vec{E}}$ (Leitfähigkeit) Ohmsches Gesetz in lokaler Form $\quad \boxed{I = G\cdot u}$ Ohmsches Gesetz

nur falls $\boxed{\begin{array}{l}\bullet\ \text{linear } (J \sim E) \\ \bullet\ \text{isotrop } (\vec{J}\parallel\vec{E})\end{array}}$ also keine Diode / NTC ... → falls linear und anisotrop: $\boxed{\vec{J} = \overleftrightarrow{\varkappa}\cdot\vec{E}}$ für hohe f → $\varkappa \neq f(\omega)$ ← S163

163 Gleichstromlehre: $\Sigma u_n = 0$ (Maschensatz) $\hat{\Leftrightarrow}$ $\boxed{\oint_{\partial A}\vec{E}\,\vec{ds} = 0}$

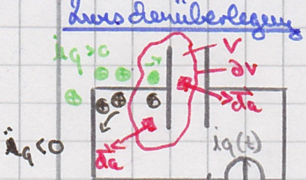
$\Sigma I_n = 0$ (Knotensatz) $\hat{\Leftrightarrow}$ $\boxed{\oiint_{\partial V}\vec{J}\cdot\vec{da} = 0}$ $\xrightarrow{=\iiint \operatorname{div}\vec{J}\,dv = 0}$ $\boxed{\operatorname{div}\vec{J} = 0}$

Gleichstromlehre

vgl. ⇒

$\operatorname{div}\vec{D} = \eta$	$\operatorname{div}\vec{J} = 0$
$\operatorname{rot}\vec{E} = 0$	$\operatorname{rot}\vec{E} = 0$
$\vec{D} = \varepsilon_0\overleftrightarrow{\varepsilon_r}\vec{E}$	$\vec{J} = \overleftrightarrow{\varkappa}\vec{E}$

Knotenüberlegung



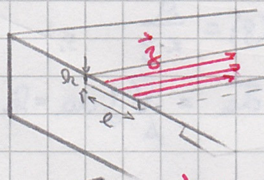
$$\boxed{\underbrace{\oiint_{\partial V}\vec{J}\,\vec{da}}_{\text{nach außen}} = -\frac{dQ_V}{dt} = -\frac{d}{dt}\iiint_V \eta\,dv}$$

24.04.2014 vgl.

$Q, \eta, \sigma, \gamma \longrightarrow$

$\rightarrow dQ = \sigma \cdot da$

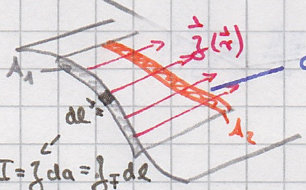
$dv = h \cdot da \quad dQ = \eta \, dv = \overbrace{\eta \cdot h}^{\sigma} \, da$ "Flächenladungsdichte" in $\frac{1}{m^2}$



$\Rightarrow I = \vec{J} \cdot A = \underbrace{J \cdot h}_{\vec{J}_F \text{ in } \frac{A}{m}} \cdot l$

$\vec{J}_F$ falls Leiterdicke sehr klein (oder starker Skin-Effekt)

166



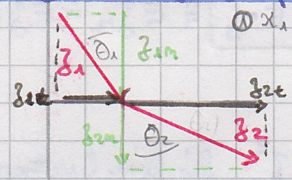
$dI = \vec{J}\, d\vec{a} = \vec{J}\, \hat{n}\, dl \cdot h = \vec{J}_F \underbrace{\hat{n}\, dl}_{d\vec{l}} \Rightarrow \overset{A}{I} = \int \overset{A/m}{\vec{J}_F}\, \underbrace{\overset{m}{d\vec{l}}}_{\hat{n} dl}$

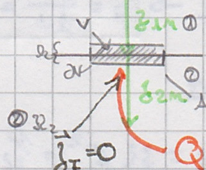
$dI = J\, da = J_F\, dl$

$\boxed{I = \iint_A \vec{J}\, d\vec{a}}$ $\swarrow$ ZI; $\nwarrow$ $\int_C \vec{J}_F\, d\vec{l}$

167

4.3 Grenzbedingungen für das Strömungsfeld





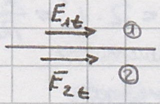
SLPS $\rightarrow J_{1n} \cdot A = J_{2n} \cdot A$

$\oint_{\partial V} \vec{J}\, d\vec{a} = -\frac{dQ_V}{dt} \Rightarrow J_{2n} A - J_{1n} A = -\frac{d}{dt} A\sigma$

$\boxed{J_{2n} = J_{1n} - \frac{\partial \sigma}{\partial t}}$ falls $\vec{J}_F = 0$

$\partial/\partial t = 0$ Gg St.

$\boxed{J_{2n} = J_{1n}}$ falls $\vec{J}_F = 0$



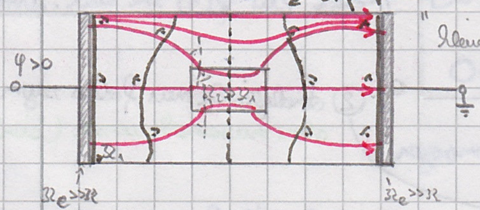
MS $\rightarrow$ $\boxed{E_{2t} = E_{1t}}$

$$\boxed{\frac{\tan \Theta_1}{\tan \Theta_2} = \frac{J_{1t}/J_{1n}}{J_{2t}/J_{2n}} = \frac{\varkappa_1 \cdot E_{1t}}{\varkappa_2 \cdot E_{2t}} = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}}$$

vgl. $\left.\begin{array}{l} D_{2n} = D_{1n} \\ E_{2t} = E_{1t} \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\tan \Theta_1}{\tan \Theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

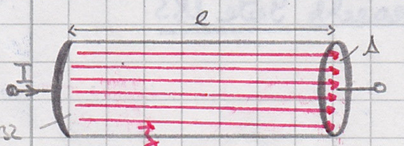
Äquipotentiallinien $\rightarrow$ Prüfung: Äquipotentialflächen ermitteln

"kleineres $\varkappa$ $\rightarrow$ kleiner Winkel"



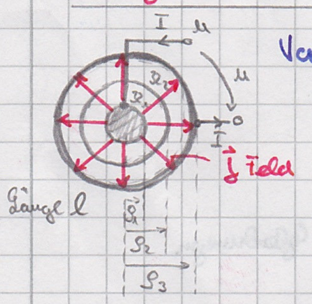
173

4.5 Das Ohm'sche Gesetz und der el. Widerstand



$\boxed{R = \frac{U}{I} = \frac{1}{\varkappa} \frac{l}{A}}$ $\hat{=} \frac{E \cdot l}{J A} = \frac{E l}{\varkappa E A} = \frac{l}{\varkappa A}$

Vorgehen: $\boxed{I \text{ vorgeben} \Rightarrow \ldots \Rightarrow U \text{ berechnen}}$



$\iint_A \vec{J}\, d\vec{a} = I \Rightarrow J \cdot 2\pi \varrho \cdot l = I \Rightarrow \vec{J}(\varrho) = \frac{I}{2\pi \varrho l} \hat{\varrho}$

Zylindermantelfläche $2\pi\varrho \cdot l$

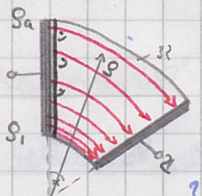
$\Downarrow \vec{E} = \frac{1}{\varkappa} \vec{J}$

$$U = \int_{\varrho_1}^{\varrho_3} \vec{E}\, \underbrace{d\vec{s}}_{d\vec{s} = d\varrho \hat{\varrho} \parallel \vec{E}} = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{I}{2\pi \varkappa_1 l \varrho}\, d\varrho + \int_{\varrho_2}^{\varrho_3} \frac{I}{2\pi \varkappa_2 l \varrho}\, d\varrho = \frac{I}{2\pi l} \left[\frac{1}{\varkappa_1} \ln\left|\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right| + \frac{1}{\varkappa_2} \ln\left|\frac{\varrho_3}{\varrho_2}\right| \right]$$

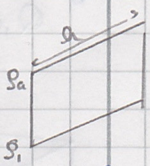
$$\Rightarrow R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi l} \left[\frac{1}{\varkappa_1} \ln\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) + \frac{1}{\varkappa_2} \ln\left(\frac{\varrho_3}{\varrho_2}\right) \right]$$

alternativ ggf.: $\boxed{U \text{ vorgeben} \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow \vec{J} \Rightarrow I \Rightarrow R}$

177 Bsp 4.2



$$\iint \vec{J}\, d\vec{a} \neq I \cdot A = J \cdot h \underbrace{(\rho_a - \rho_i)}_{A}$$



Prüfung Kapazität oder Widerstand berechnen entweder I oder U vorgeben

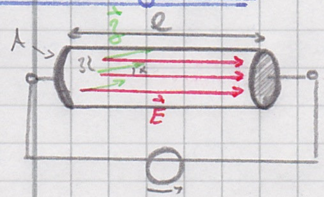
$$U = U_{12} = \int \vec{E}\, d\vec{s} = E \cdot \rho \cdot \alpha \qquad \Rightarrow E_\phi(\rho) = \frac{U}{\alpha \cdot \rho}$$

$$J_\phi(\rho) = \kappa \cdot E_\phi(\rho) = \frac{\kappa \cdot U}{\alpha \cdot \rho} \qquad \Rightarrow I = \iint_A \vec{J}\, d\vec{a} = \iint_A J\, da = h \cdot \int_{\rho_i}^{\rho_a} \frac{\kappa \cdot U}{\alpha \rho} d\rho$$

$$\Rightarrow R = \frac{U}{I} = \frac{\alpha}{h \cdot \kappa \ln\left(\frac{\rho_a}{\rho_i}\right)} \qquad = h \cdot \frac{\kappa U}{\alpha} \ln\left(\frac{\rho_a}{\rho_i}\right)$$

4.6 Leistungsumsatz

178



$P = U \cdot I$ Leistung

$$\rightarrow \boxed{p = \frac{P}{V} = \frac{U \cdot I}{l \cdot A} = E \cdot J} \text{ Leistungsdichte}$$

$$I = J_n \cdot A \quad \text{falls anisotrop} \rightarrow \boxed{p = \frac{dP}{dV} = \vec{E} \cdot \vec{J}} \mathrel{\hat{=}} E J_n = E J \cos\alpha$$

auch nichtlinear

linear und isotrop $\Rightarrow$ $\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$ & $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\kappa}$ $\Rightarrow$ $p = \kappa E^2 = \frac{1}{\kappa} J^2$ für linear & isotrop

vgl. allgemein $P = U \cdot I \xrightarrow{\text{linear}} P = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R} = G U^2 = \frac{1}{G} \cdot I^2$

$$\boxed{P = U \cdot I = \iiint_V \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{J}}_{p}\, dV} \text{ Leistungsumsatz}$$

Leistungsdichte

08.05.2014

180 4.7 Gesetze des stationären Strömungsfeldes in differentieller Form

lokale Form der Gleichungen im stat. Strömungsfeld

$$\oint_{\partial A} \vec{E}\, d\vec{s} = 0 \xRightarrow{\text{Stokes}} \text{wirbelfrei} \Rightarrow \boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = 0} \qquad \oint_{\partial V} \vec{J}\, d\vec{a} = 0 \xRightarrow{\text{Gauß}} \text{quellenfrei} \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{J} = 0}$$

① $\Leftarrow -\operatorname{grad} \varphi = \vec{E} \xrightarrow{②} \boxed{\vec{J} = \overleftrightarrow{\kappa} \cdot \vec{E}}$ falls linear ③

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\overleftrightarrow{\kappa} \cdot (-\operatorname{grad} \varphi)) = 0 \rightarrow \boxed{\operatorname{div}(\overleftrightarrow{\kappa} \cdot \operatorname{grad} \varphi) = 0} \text{ PDGL für } \varphi(\vec{r}) \text{ im stat. Strömungsfeld}$$

$$\boxed{\nabla \cdot (\overleftrightarrow{\kappa} \cdot \nabla \varphi) = 0}$$

← ② analytisch nur falls sym.

aber numerisch sonst (Sim Phys. Sys.)

$(\overleftrightarrow{\kappa} \rightarrow \kappa \neq f(\vec{r})$ d.h. isotrop und (stückweise) homogen

182 $\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \boxed{\Delta \varphi = 0}$ Laplace-Gleichung $\rightarrow$ vgl. E-Statik falls $\eta = 0$ und homogen/isotrop

183 4.8 Schlussbemerkungen zum stationären Strömungsfeld

Übersicht Seite 183

$$\oint_{\partial V} \vec{J}\, d\vec{a} = 0 \leftarrow \text{① falls Sym. Probleme vgl. E-Statik}$$

185 Bsp 4.4 $\Delta \varphi = 0$ im Medium 1 und 2

$$\text{(Zyl. Koord. s. FoSa)} \quad \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial z} = 0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = F \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{F}{\rho} \Rightarrow \varphi(\rho) = F \ln(\rho) + G$$

$$\varphi(\rho) = \begin{cases} \underline{\underline{F_1}} \ln(\rho) + \underline{\underline{G_1}} & \text{für } \rho_i \leq \rho \leq \rho_m \\ \underline{\underline{F_2}} \ln(\rho) + \underline{\underline{G_2}} & \text{für } \rho_m \leq \rho \leq \rho_a \end{cases} \rightarrow 4 \text{ Unbekannte} \rightarrow 4 \text{ Gleichungen}$$

$$\varphi(\rho_i) = \varphi_i \Rightarrow \| \; F_1 \ln \rho_i + G_1 = \varphi_i \quad (1)$$

08.05.2014

186 Bsp. 4.4 $\varphi(\varrho_a) = \varphi_a \Rightarrow \| F_2 \ln \varrho_a + G_2 = \varphi_a$ (2)

$\varphi(\varrho_m^-) = \varphi(\varrho_m^+) \Rightarrow \| F_1 \ln \varrho_m + G_1 = F_2 \ln \varrho_m + G_2$ (3)

$\varphi_i \; R_1 \; R_2 \; \varphi_a$, $I_1 = I_2$ $\Rightarrow \varkappa E_\varrho = \varkappa\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right)$ stetig $\Rightarrow \| \varkappa_1 \frac{F_1}{\varrho_m} = \varkappa_2 \frac{F_2}{\varrho_m}$ (4)

$\rightarrow J_1$ stetig $\Rightarrow J_\varrho$ stetig

Prüfung: Gleichungssystem aufstellen ohne auszurechnen (Hinweis)

2. Lösung I vorgegeben $\Rightarrow \vec{J} = ??$ mit $I = \iint_A \vec{J}\, d\vec{a}$ — sym. $\partial/\partial\varphi = \partial/\partial z = 0 \Rightarrow J_\varrho \cdot A = I$ — Bogenlänge $A = d \cdot \underbrace{\varrho \cdot \alpha}$

$\rightarrow J_\varrho(\varrho) = \frac{I}{d\alpha} \cdot \frac{1}{\varrho} \rightarrow E_\varrho(\varrho) = \frac{J_\varrho(\varrho)}{\varkappa(\varrho)}$

$U_{im} = \varphi_i - \varphi_m = \int_{\varrho_i}^{\varrho_m} \frac{1}{d\alpha\varkappa_1\varrho}\, d\varrho = \frac{I}{d\alpha\varkappa_1} \ln\left(\frac{\varrho_m}{\varrho_i}\right) \Rightarrow \varphi_m = \varphi(\varrho_m) = \varphi_i - \frac{I}{d\alpha\varkappa_1} \ln\left(\frac{\varrho_m}{\varrho_i}\right)$

I aus $U_{ia} = \varphi_i - \varphi_a = \int_{\varrho_i}^{\varrho_m} \frac{I}{d\alpha\varkappa_1\varrho}\, d\varrho + \int_{\varrho_m}^{\varrho_a} \frac{I}{d\alpha\varkappa_2\varrho}\, d\varrho = I \cdot R_{\text{Restterm}} \Rightarrow I = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{R_{\text{Restterm}}} \Rightarrow$ von ausfüllen

187

5 Das stationäre magnetische Feld (Magnetostatik)

Dauermagnete

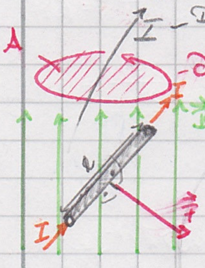
stromdurchflossene Leiter

Näherung { magnetischer Kreis mit / ohne Luftspalt (u. U. verzweigt) ↳ Ersatzschaltbilder (R_m ...)

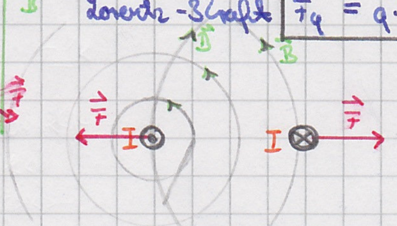
192 $\vec{B} \;\hat{=}\;$ magn. Flussdichte (in $T = \frac{Vs}{m^2}$) $= \frac{d\Phi}{da}$ — $\boxed{\oint_{\partial V} \vec{B}\, d\vec{a} = 0}$ — magn. Flussdichte ist immer geschlossen (kein Anfang & kein Ende) — $\boxed{\iint_A \vec{B}\, d\vec{a} = \Phi}$ magn. Fluss

$\vec{H} \;\hat{=}\;$ magn. Feldstärke (in $\frac{A}{m}$) — $\boxed{\oint_{\partial A} \vec{H}\, d\vec{s} = I_A = \iint_A \vec{J}\, d\vec{a}}$ Durchflutungsgesetz

Strom durch Fläche — Ströme sind Ursache des magn. Feldes

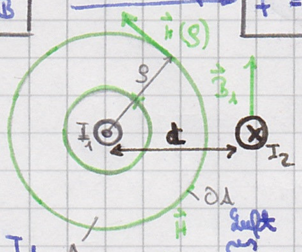


Lorentz-Kraft $\boxed{\vec{F}_q = q \cdot \vec{v}_q \times \vec{B}}$



Teilvolumen $\rightarrow \boxed{\vec{F} = I\, \vec{l} \times \vec{B}}$ — Länge l und Richtung von I

$\boxed{H_\varrho(\varrho) = \frac{I}{2\pi\varrho}}$



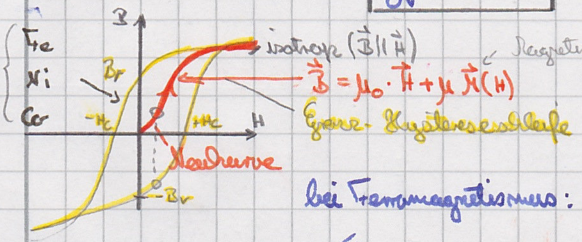
196 $\oint_{\partial A} \vec{H}\, d\vec{s} = I_A \Rightarrow H_\varrho 2\pi\varrho = I \Rightarrow H_1 = \frac{I_1}{2\pi d} \Rightarrow B_1 = \underbrace{\mu_0}_{\text{Luft}} H_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \xRightarrow{\alpha = 90°} F_2 = I_2 \cdot l \cdot B_1 = \frac{\mu_0 l}{2\pi d} I_1 I_2$

$\left.\begin{array}{l} l = 1\,m \\ d = 1\,m \\ I_1 = I_2 = 1\,A \end{array}\right\}$ $F = 2 \cdot 10^{-7}\,N$ def. Ampère $\Rightarrow \boxed{\mu_0 = \frac{F_2\, 2\pi d}{l \cdot I_1 I_2}} = \boxed{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}}$ magn. Feldkonstante

Zentrale Gesetze: $\boxed{\oint_{\partial V} \vec{B}\, d\vec{a} = 0}$ und $\boxed{\oint_{\partial A} \vec{H}\, d\vec{s} = I_A}$ $\boxed{\vec{B} = \mu_0 \vec{H}}$ für Vakuum

Ursache des Feldes!

202 Ferromagnetische Elemente { Fe, Ni, Co



$B = f(H)$ gilt nicht — abhängig von Vorgeschichte $\rightarrow$ Komplikation

bei Ferromagnetismus: + Nichtlinearität + (abhängig von Historie) + u. U. Anisotropie

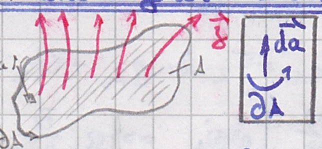
199 $\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \underbrace{\mu_0 \vec{H}}_{\text{Vakuum}} + \underbrace{\mu_0 \vec{M}(H)}_{\text{Magnetisierung}}}$ vgl. $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

falls linear $B \sim H$

200 bzw. 203 $\boxed{\vec{B} = \overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{H} = \mu_0 \overleftrightarrow{\mu_r} \vec{H}}$ $\xrightarrow[\text{und isotrop}]{\text{falls linear}}$ $\boxed{\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}}$

204 5.7 Das Durchflutungsgesetz zur Berechnung von H-Feldern

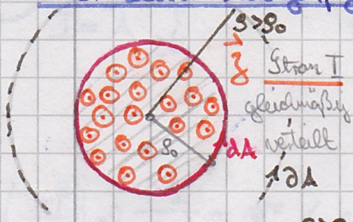
$$\boxed{\oint_{\partial A} \vec H \, d\vec s = \iint_A \vec J \, d\vec a = I_A}$$

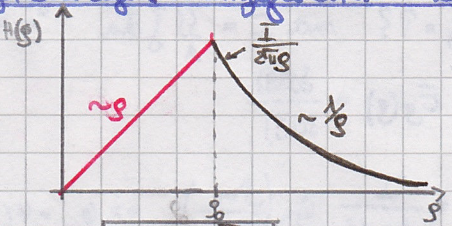


vgl. Stokes

205 $Q_V = \cancel{\sum Q_i} + \cancel{\int \lambda \, ds} + \cancel{\iint \sigma \, da} + \iiint \eta \, dv$ $\xrightarrow{\text{analog}}$ $I_A = \cancel{\sum I_i} + \cancel{\int \vec I_F \, d\vec l} + \iint_A \vec J \, d\vec a$ → → "hier enthalten" → dazudenken

206 Das H-Feld eines langen, geradlinigen kreiszylindrischen Leiters



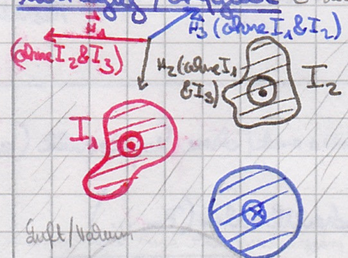


$\oint \vec H \, d\vec s = H \, 2\pi\rho = \frac{I}{\pi\rho_0^2}\pi\rho^2 = J_z \pi \rho^2$

$= \boxed{H(\rho) = \frac{J_z}{2}\rho}$ innerhalb

$\oint \vec H \, d\vec s = H \, 2\pi\rho \overset{\rho>\rho_0}{=} I \Rightarrow \boxed{H(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho}}$ außerhalb

207 Überlegung / Aufgabe 3 Leiter

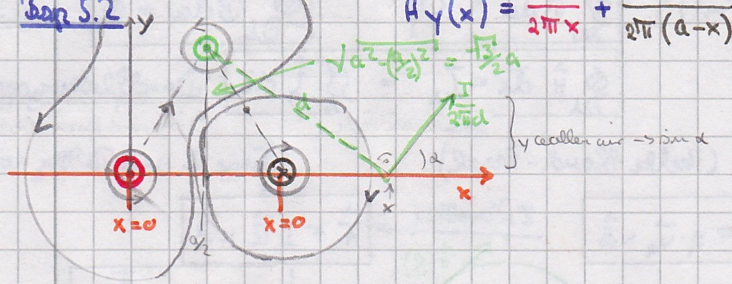


$$\boxed{\vec H_{ges} = \sum \vec H_i \quad \text{Superposition}}$$

nur falls 1) lineare Materie

2) falls Leiter $\mu_r \approx 1$ (Cu, Al, Ag, Au, ...)

208 Bsp. 5.2



$$H_y(x) = \frac{I}{2\pi x} + \frac{2I}{2\pi(a-x)} + \frac{I}{2\pi\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2}} \cdot \overbrace{\sin\alpha}^{\frac{x-\frac{a}{2}}{d}}$$

Nach Kante bis Aufgabe 2.7