FoW **Bsp 5.2 weiter** $\Phi = \iint \underbrace{\vec B\, d\vec a}_{B_n\, da} = \iint B_y\, da = \mu_0 \int_0^l \int_{R_0}^{a-R_0} H_y\, dx\, dz = \mu_0\, l \int_{R_0}^{a-R_0} H_y(x)\, dx = \mu_0$

$$= \mu_0 \cdot l \cdot \frac{I}{2\pi}\int_{R_0}^{a-R_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x-a} + \underbrace{\frac{x-a/2}{d^2+(x-a/2)^2}}_{\text{ungerade bzgl } x = a/2}\right) = \frac{\mu_0 l I}{2\pi}\left[\ln|x| - 2\ln|x-a|\right]_{R_0}^{a-R_0}$$

→ kommt 0 raus → nicht berücksichtigt

$$= \frac{\mu_0 l I}{2\pi}\left(\ln\frac{a-R_0}{R_0} - 2\ln\frac{R_0}{a-R_0}\right) = \underline{\frac{3\mu_0 l I}{2\pi}\ln\left(\frac{a-R_0}{R_0}\right)}$$ = Fluss zwischen den beiden Leitern

Bsp 5.3 $\frac{\partial}{\partial\phi} = 0$ keine Winkelabhängigkeit weil $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ ⇒ $\vec H(\varrho)$ ≙ Feldlinien ≙ Kreisen

→ eingeschlossener Strom

$\oint_A \vec H\, d\vec s = I_A$ ⇐ **1. Fall $\varrho < R_1$:** $H_\phi 2\pi\varrho = 0 \Rightarrow H_\phi = 0$

2. Fall $R_1 \le \varrho \le R_2$: $H_\phi 2\pi\varrho = J(\pi\varrho^2 - \pi R_1^2) = I\cdot\frac{1}{2\pi\varrho}\cdot\frac{\pi\varrho^2 - \pi R_1^2}{\pi R_2^2 - \pi R_1^2} = \frac{I}{2\pi\varrho}\cdot\frac{\varrho^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$

$J = \frac{I}{\pi R_2^2 - \pi R_1^2}$

3. Fall $R_2 \le \varrho \le R_3$: $H_\phi 2\pi\varrho = I \Rightarrow H_\phi = \frac{I}{2\pi\varrho}$

Stromdichte außen

4. Fall $R_3 \le \varrho \le R_4$: $H_\phi 2\pi\varrho = I - J_a(\pi\varrho^2 - \pi R_3^2) \Rightarrow H_\phi = \frac{I}{2\pi\varrho} - \frac{I}{2\pi\varrho}\cdot\frac{\varrho^2 - R_3^2}{R_4^2 - R_3^2}$

andere Stromrichtung

$J_a = \frac{I}{\pi R_4^2 - \pi R_3^2}$

5. Fall $\varrho \ge R_4$: $H_\phi 2\pi\varrho = I - I = 0 \Rightarrow H_\phi = 0$

212 **5.8 Grenzbedingungen für das Magnetfeld siehe Bilder im Skript** (vgl. E-Statik und Strömungsfeld)

$\oint_{\partial V}\vec B\, d\vec a = 0 \Rightarrow B_{1n} A = B_{2n} A \Rightarrow \boxed{B_{1n} = B_{2n}}$

$\oint_{\partial A}\vec H\, d\vec s = I_A \Rightarrow H_{2t}\cdot l - H_{1t}\cdot l = J_F\cdot l$ A/m = Flächenstromdichte

$\Rightarrow \boxed{H_{2t} = H_{1t} \text{ falls } J_F = 0}$

$\frac{\tan\Theta_1}{\tan\Theta_2} = \frac{B_{2t}/B_{2n}}{B_{1t}/B_{1n}} = \frac{B_{2t}}{B_{1t}}\underbrace{\frac{B_{1n}}{B_{2n}}}_{=1} \overset{\text{isotrop}}{=} \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{H_{2t}}{H_{1t}} = \boxed{\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\tan\Theta_2}{\tan\Theta_1}}$ falls $\vec J_F = 0$ & isotrop & linear

$\frac{\tan\Theta_2}{\tan\Theta_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$

$\frac{\tan\Theta_2}{\tan\Theta_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$

214

5.11 homogen? isotrop? **Übergang auf die diff. Form der Grenzregeln der Magnetostatik**

$\oint_{\partial V}\vec B\, d\vec a \overset{\text{quellenfrei}}{=} 0 = \iiint_V \mathrm{div}(\vec B)\, dv = 0 \xrightarrow{\text{bel. V}} \boxed{\underbrace{\mathrm{div}\,\vec B = 0}_{\text{Quellendichte}} = \nabla\vec B}$

$\oint_{\partial A}\vec H\, d\vec s \overset{1}{=} \iint_A \vec J\, d\vec a \overset{2}{=} \iint_A \mathrm{rot}(\vec H)\cdot d\vec a \xrightarrow{\text{bel. A}} \boxed{\underbrace{\mathrm{rot}\,\vec H}_{\text{Wirbeldichte}} = \nabla\times\vec H = \vec J}$

wirbelbehaftet

Stokes

$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec H) = \nabla(\nabla\times\vec H) \equiv 0 = \nabla\vec J = \mathrm{div}\,\vec J$ ⇒ KPS in Durchflutungsgesetz enthalten

auch $\vec B = \mu_0\overleftrightarrow{\mu_r}\cdot\vec H$ (anisotrop, linear)

neues Hilfsfeld?? $\mathrm{rot}\,\vec H \neq 0 \Rightarrow \vec H \neq \pm\,\mathrm{grad}\,\varphi_m$ $\vec A$ = magn. Vektorpotential

$\mathrm{div}\,\vec B = 0 \Rightarrow$ es existiert $\vec A$ mit $\boxed{\vec B = \mathrm{rot}\,\vec A}$

wegen $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec A) \equiv 0$

$\boxed{\mathrm{div}\,\vec A}$ wird geeignet gewählt (Eichung)

218 $\vec B = \mu_0\overleftrightarrow{\mu_r}\cdot\vec H \to \vec H = \frac{1}{\mu_0}\overleftrightarrow{\mu_r}^{-1}\cdot\vec B \to \mathrm{rot}\underbrace{\left(\frac{1}{\mu_0}\overleftrightarrow{\mu_r}^{-1}\cdot(\mathrm{rot}\,\vec A)\right)}_{\vec H} = \vec J$ wird nur numerisch gelöst (siehe SimPhys Sys.)

$\xrightarrow{\text{homogen + isotrop}}$ $\text{rot}\left(\frac{1}{\mu_0\mu_r}\text{rot}\,\vec{A}\right) = \vec{j}$ $\Rightarrow$ $\text{rot}(\text{rot}\,\vec{A}) = \mu\vec{j}$

$$\text{grad}(\text{div}\,\vec{A}) - \underbrace{\Delta}_{\text{Laplace}}\vec{A} = \mu\vec{j}$$

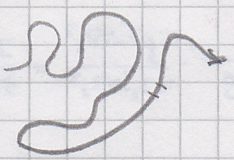
Coulomb Eichung $\boxed{\text{div}\,\vec{A} = 0}$ $\Rightarrow$ PDGL für $\vec{A}(\vec{r})$ $\boxed{\Delta\vec{A} = -\mu\vec{j}}$ vgl. $\Delta\varphi = -\frac{\eta}{\varepsilon}$

falls linear, isotrop und homogen

vgl $\Delta\varphi = -\frac{\eta}{\varepsilon}$

↓ unendlich ausgedehnter homogener Raum

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\eta(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dv' \Longrightarrow \begin{matrix}\Delta A_x = -\mu j_x\\ \Delta A_y = -\mu j_y\\ \Delta A_z = -\mu j_z\end{matrix} \Longrightarrow \boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dv'}$$



$\vec{H}(\vec{r}) = ??$

Bsp. 5.5 (hier nicht unendlich ausgedehnter homogener Raum)

$\Delta\vec{A} = -\mu\vec{j}$ mit $\vec{j} = j\hat{z}$ $\Rightarrow$ $\vec{A} = A_z\hat{z}$

$\hookrightarrow \Delta A_z = -\mu j_z \xrightarrow[\partial/\partial z = 0]{\partial/\partial\phi = 0} \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial A_z}{\partial\varrho}\right) = -\mu j_z$ mit $A_z = A_z(\varrho)$

$\underline{\varrho \le R_L}$ $j_{zL} = \frac{I}{\pi R_L^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{\cancel{\varrho}}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial A_z}{\partial\varrho}\right) = -\mu j_{zL}\cdot\varrho$

$$\left(\cancel{\varrho}\frac{\partial A_z}{\partial\varrho}\right) = \frac{1}{2}\mu j_{zL}\varrho^2 + \frac{C_L}{\varrho}$$

$$A_z(\varrho) = -\frac{1}{4}\mu_L j_{zL}\varrho^2 + C_L\ln\varrho + D_L \quad \text{im Leiter}$$

$\underline{R_L \le \varrho \le R_S}$ $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial A_z}{\partial\varrho}\right) = 0$ $\Rightarrow$ $\cancel{\varrho}\frac{\partial A_z}{\partial\varrho} = \frac{C_S}{\varrho}$ $\Rightarrow$ $A_z(\varrho) = C_S\ln\varrho + D_S$ in Schicht

$\underline{\varrho \ge R_S}$ $A_z(\varrho) = C_0\ln\varrho + D_0$ in Luft   6 Unbekannte   Magnetfeld zeigt nur in Kreisrichtung

--> Konstanten aus H_t stetig (B_n stetig) $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$ $\Rightarrow$ $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\text{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{\mu}\left(-\hat{\phi}\frac{\partial A_z}{\partial\varrho}\right)$

$$\vec{H} = \hat{\phi}\begin{cases}\frac{1}{2}j_{zL}\cdot\varrho - \frac{C_L}{\mu_L\varrho} & \text{Leiter (L)}\\ -\frac{C_S}{\mu}\cdot\frac{1}{\varrho} & \text{Schicht (S)}\\ -\frac{C_0}{\mu_0}\frac{1}{\varrho} & \text{Luft (0)}\end{cases}$$

→ $\vec{H}$ muss endlich bleiben $\Rightarrow$ $\underline{C_L = 0}$

$\vec{H}_\phi$ stetig bei $\varrho = R_L$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}j_{zL}\cdot R_L = -\frac{C_S}{\mu_S}\frac{1}{R_L}$ $\Rightarrow$ $\underline{C_S = -\frac{\mu_S}{2}j_{zL}R_L^2}$

$\vec{H}_\phi$ stetig bei $\varrho = R_S$ $\Rightarrow$ $-\frac{C_S}{\mu_S}\frac{1}{R_S} = -\frac{C_0}{\mu_0}\cdot\frac{1}{R_S}$ $\Rightarrow$ $C_0 = \frac{\mu_0}{\mu_S}C_S = \underline{-\frac{\mu_0}{2}j_{zL}\cdot R_L^2}$

223 **5.12 Stromverteilung im unendlich ausgedehnten homogenen Raum**

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dv'$$

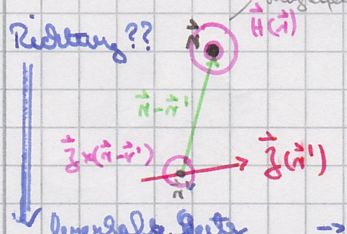
$\vec{J}\,d\vec{v} \mathrel{\hat{=}} \vec{J}_F\,da' \mathrel{\hat{=}} I\,d\vec{s}\,'$ ($dv' = A\,ds'$) $\;\to\; \vec{J}\,dv' = \vec{J}\,A\,d\vec{s}\,'$

$$\underset{\vec{H}(\vec{r})}{\vec{H}} = \frac{1}{\mu}\cdot\vec{B} = \frac{1}{\mu}\cdot \operatorname{rot}\big(\underset{\vec{A}(\vec{r})}{\vec{A}}\big) = \frac{1}{4\pi}\underbrace{\operatorname{rot}_{\vec{r}}\iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dv'}_{\text{„Ableitung einer Summe" } \hat{=} \text{ Summe der Ableitungen}}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \operatorname{rot}_{\vec{r}} \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dv' \quad \underset{\text{Bsp 2.33}}{\left(\operatorname{rot}\frac{\vec{e}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{\hat{e}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right)} \to \quad \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dv'$$

Richtung??

Klassisch mit Rechte-Hand-Regel



linienhafte Leiter $\;\to$ **Biot-Savart'sches Gesetz**

Faltungsintegral = I verwenden

$$\boxed{\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\text{Leiter}} I(\vec{r}\,')\,\frac{d\vec{s}\,'\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}}$$

$\vec{r}\,'$ ist immer der Ort der Ursache (von Strom) $\Rightarrow \vec{r}$ ist Ort an dem ich Beobachte

vgl. Faltung $\quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')\,g(t-t')\,dt$

224 **Bsp. 5.7** $\quad \vec{r} = \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix} = z\cdot\hat{z} \qquad |r-r'| = \sqrt{R^2+z^2}$

$\vec{r}\,' = R\cdot\hat{\varrho}\,'$

$\Rightarrow\quad d\vec{s}\,'\times(\vec{r}-\vec{r}\,') = R\,d\phi'\,\hat{\phi}\times(z\cdot\hat{z} - R\hat{\varrho}\,') = Rz\,d\phi'\,\hat{\phi}\times\hat{z} - R^2\,d\phi'\,\hat{\phi}\,'\times\hat{\varrho}\,'$

$ds' = \underbrace{R\,d\phi'}_{\text{Bogenlänge}}\,\hat{\phi}\,'$

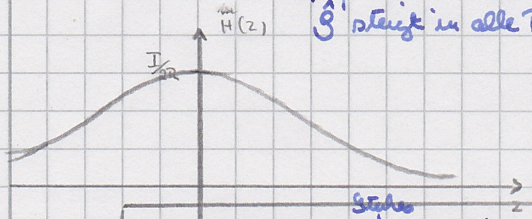
$\quad = Rz\,d\phi'\,\underset{\hat{\phi}\times\hat{z}}{\hat{\varrho}\,'} - R^2\,d\phi'\,(-\hat{z})$

$\Downarrow$

$$\vec{H}(0,0,z) = \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\hat{\varrho}\,'Rz\,d\phi' + \hat{z}\,R^2\,d\phi'}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \hat{z}\,\frac{I}{4\pi}\cdot 2\pi\,\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \hat{z}\,\frac{I}{2}\cdot\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

! $\hat{\varrho}\,'$ wegfallen $\Rightarrow 2\pi$

$\hat{\varrho}\,'$ zeigt in alle Richtung der Ebene $\to$ $-$ & $+$ $=0$



- **Zusatz:** $\boxed{\Phi = \iint_A \vec{B}\,d\vec{a} = \oint_{\partial A} \vec{A}\,d\vec{s}}$ (Stokes; $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$; A: Fläche; ! Vektorpotential)