223 **5.12 Stromverteilung im unendlich ausgedehnten homogenen Raum**

$$\vec A(\vec r) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec J(\vec r\,')}{|\vec r-\vec r\,'|}\,dv' \qquad \vec J\,d\vec v \hat= \vec J_F\,da' \hat= I\,d\vec s\,' \;\; \hookrightarrow \vec J\,dv' = \vec J A\,d\vec s\,'$$

$dv' = A\,ds'$

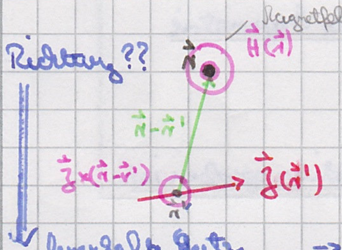
$$\underset{\vec H(\vec r)}{\vec H} = \frac{1}{\mu}\cdot\vec B = \frac{1}{\mu}\cdot \mathrm{rot}(\underset{\vec A(\vec r)}{\vec A}) = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}_{\vec r}\underbrace{\iiint_V \frac{\vec J(\vec r\,')}{|\vec r-\vec r\,'|}\,dv'}$$

"Ableitung einer Summe" $\hat=$ Summe der Ableitungen

$$\vec H = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \mathrm{rot}_{\vec r}\,\frac{\vec J(\vec r\,')}{|\vec r-\vec r\,'|}\,dv' \left(\mathrm{rot}\frac{\vec a}{|\vec r-\vec r\,'|} = \frac{\vec a\times(\vec r-\vec r\,')}{|\vec r-\vec r\,'|^3}\right) \Rightarrow \boxed{\vec H(\vec r) = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec J(\vec r\,')\times(\vec r-\vec r\,')}{|\vec r-\vec r\,'|^3}\,dv'}$$

Bsp 2.33

Richtung ??



Senkrecht mit Rechte-Hand-Regel

linienhafte Leiter $\rightarrow$ Biot-Savart'sches Gesetz

Fallunterscheidung = I reicht

$$\boxed{\vec H(\vec r) = \frac{1}{4\pi}\int_{\text{Leiter}} I(\vec r)\,\frac{d\vec s\,'\times(\vec r-\vec r\,')}{|\vec r-\vec r\,'|^3}}$$

$\vec r\,'$ ist immer der Ort der Ursache (vom Strom) $\Rightarrow \vec r$ ist Ort an dem ich beobachte

vgl. Faltung $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')\,g(t-t')\,dt$

224 **Bsp. 5.7** $\vec r = \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix} = z\cdot\hat z \qquad |\vec r-\vec r\,'| = \sqrt{R^2+z^2}$

$\vec r\,' = R\cdot\hat\varrho\,' \qquad \Rightarrow$

$d\vec s\,'\times(\vec r-\vec r\,') = R\,d\varphi'\,\hat\varphi\,'\times(z\cdot\hat z - R\hat\varrho\,') = Rz\,d\varphi'\,\hat\varphi\,'\times\hat z - R^2\,d\varphi'\,\hat\varphi\,'\times\hat\varrho\,'$

$d\vec s\,' = \underbrace{R\,d\varphi'}_{\text{Bogenlänge}}\,\hat\varphi\,'$

$= Rz\,d\varphi'\,\hat\varrho\,' - R^2\,d\varphi'(-\hat z)$

$\hat\varphi\times\hat z$

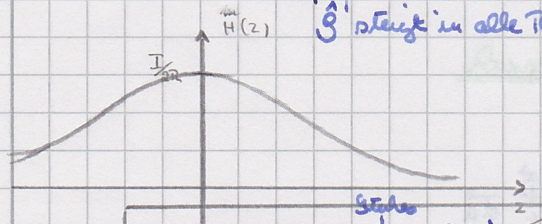
$\Downarrow$

! $\hat\varrho\,'$ rausfallen.

$$\vec H(0,0,z) = \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\hat\varrho\,' Rz\,d\varphi' + \hat z R^2\,d\varphi'}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \hat z\,\frac{I}{4\pi}\cdot 2\pi\,\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \hat z\,\frac{I}{2}\cdot\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

$\rightarrow 2\pi$

$\hat\varrho\,'$ steigt in alle Richtung der Ebene $\rightarrow - \& + = 0$



- **Zusatz:** $\boxed{\Phi = \iint_A \vec B\,d\vec a \overset{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial A}\vec A\,d\vec s}$! Vektorpotential

$\vec B = \mathrm{rot}\,\vec A$; A: Fläche

22.05.2014 WH $\rightarrow$ FoSa "Zusatz Magnetostatik"

unendlich lange Leiter $\rightarrow$ I kann man rausziehen

227 **Bsp. 5.9** $\vec H(\vec r) = \frac{I}{4\pi}\int_{\text{Leiter}}\frac{d\vec s\,'\times(\vec r-\vec r\,')}{|\vec r-\vec r\,'|^3}$ Gesetz von Biot-Savart

Rechte Hand-Regel $\rightarrow$ H Strom fließt immer in y-Richtung

Beitrag 1: $d\vec s\,' = -\hat x\,dx'$

$\vec r-\vec r\,' = 0 - (x'\hat x - a\hat z) = a\hat z - x'\hat x \quad \Rightarrow |\vec r-\vec r\,'| = \sqrt{a^2+x'^2}$

$\hat x\times\hat x = 0;\ \hat x\times\hat z = -\hat y$

$d\vec s\,'\times(\vec r-\vec r\,') = dx'\,\hat x\times(a\hat z - x'\hat x) = \hat y\,a\,dx'$

$$\vec H_1(0,0,0) = \frac{I}{4\pi}\int_{-a}^{0}\frac{a\,dx'}{(a^2+x'^2)^{3/2}}\,\hat y \overset{\text{FoSa}}{=} \hat y\,\frac{Ia}{4\pi}\left[\frac{x'}{a^2\sqrt{a^2+x'^2}}\right]_{-a}^{0} = \hat y\,\frac{I}{4\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2a^2}} = \hat y\,\frac{I}{2\pi a}\,\frac{1}{2\sqrt2}$$

∞ ausgedehnte Leiter

$\vec H_2(0,0,0) = 2\cdot \vec H_1(0,0,0)$ aus Symmetrie = Beitrag 2:

$\vec H_3(0,0,0) = \vec H_1(0,0,0)$ — " — = " 3:

Beitrag 4: $\vec{ds}' = a\,d\varphi'\,\hat\varphi'$; $|\vec r - \vec r'| = a$; $\vec{ds}' \times (\vec r - \vec r') = \hat y\, a\, d\varphi'\, a$

$$\vec H_4(0,0,0) = \frac{I}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{a\,d\varphi'}{a^2}\,\hat y = \frac{I}{4\pi a}\pi\,\hat y$$

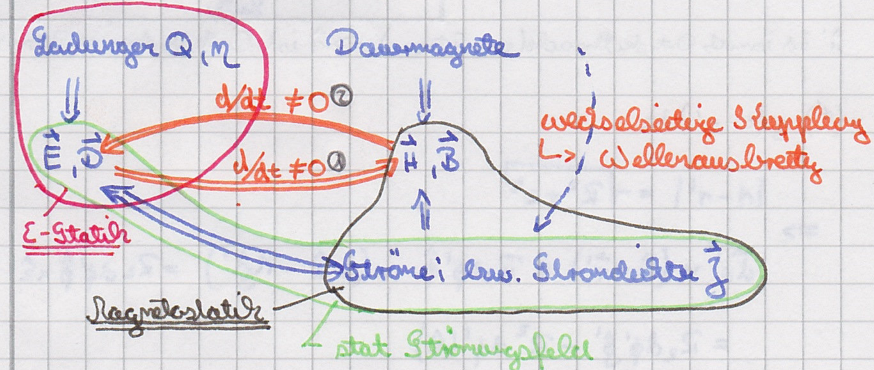
=> Gesamtfeld: $\vec H(0,0,0) = \sum_{i=1}^{4}\vec H_i(0,0,0) = \hat y\,\frac{I}{2\pi a}\underbrace{\left(\frac{4}{2\sqrt2}+\frac{\pi}{2}\right)}_{2{,}9850}$ -> 3fache als wenn nur ein Seit vorbei gehen würde

229 Lösungsverfahren: ① ausgehend von $\oint_{\partial A}\vec H\,\vec{ds} = I_A$ bei ausgeprägter Symmetrie

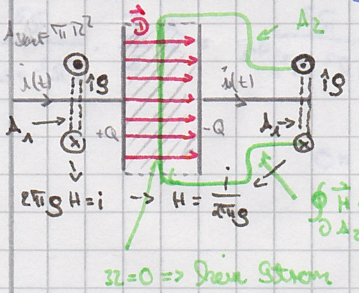
② PDGL für $\vec A(\vec r)$ lösen

③ Biot Savart falls Stromverteilung im homogenen Medium gegeben ist

⑥ Die Maxwell-Gleichungen für zeitabhängige Felder



231 6.1 Erweiterung des Durchflutungsgesetzes



bisher $\oint_{\partial A_1}\vec H\,\vec{ds} = I_A = \iint_{A_1}\vec J\,\vec{da}$

$\oint_{\partial A_2}\vec H\,\vec{ds} = I_A = 0$ Widerspruch

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(\pi R^2\cdot D)}{dt} = \pi R^2\frac{dD}{dt} = \iint_{A_2}\frac{\partial\vec D}{\partial t}\,\vec{da}$$

⇓

allgemein: $\boxed{\oint_{\partial A}\vec H\,\vec{ds} = \iint_A\Big(\underbrace{\vec J}_{}+\underbrace{\frac{\partial\vec D}{dt}}_{}\Big)\vec{da}}$ Durchflutungsgesetz in allg. Form

↳ Verschiebungsstromdichte

-> Konvektionsstromdichte

Satz von Stokes

$\iint_A \text{rot}\,\vec H\,\vec{da}$ -> lokale Form $\boxed{\text{rot}\,\vec H = \vec J + \frac{\partial\vec D}{\partial t}}$ $\underbrace{\text{div}(\text{rot}\,\vec H)}_{=0} = \text{div}\,\vec J + \text{div}\frac{\partial\vec D}{\partial t} = \text{div}\,\vec J + \frac{d}{dt}\underbrace{\text{div}\,\vec D}_{\eta}$

$$\boxed{\begin{aligned}&\to \text{div}\,\vec J + \frac{\partial\eta}{\partial t} = 0\\ &\text{div}\,\vec J = -\frac{\partial\eta}{dt}\end{aligned}}$$

lokale Form des Ladungserhaltungssatzes (Kontinuitätsgleichung)

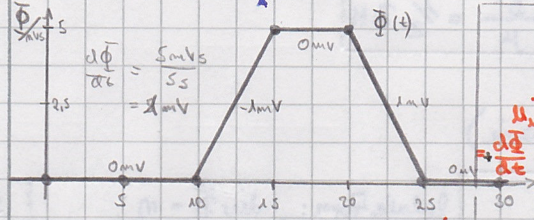
$$\xrightarrow[\text{Satz v. Gauß}]{\iiint dv}\ \oint_{\partial V}\vec J\,\vec{da} = -\frac{d}{dt}\underbrace{\iiint_V \eta\,dv}_{Q_V}$$

22.05.2014

6.2 Das Faraday'sche Induktionsgesetz

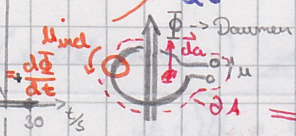
$A = 5\,cm \cdot 20\,cm = 100\,cm^2 \to 100\,cm^2 \cdot 0{,}5\,\frac{Vs}{m^2} = 0{,}005\,Vs$

Bsp 6.1: Fluss $\Phi = \iint_A \vec{B}\,d\vec{a}$



→ hängt von Spannungszählpfeil ab

$u(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$



induktive Spng. Finger der rechten Hand

① Induktive Spannung

Maschensatz nicht mehr gültig

2. Interpretation ohne formale Spngs Quelle

$$\boxed{\oint_{\partial A} \vec{E}\,d\vec{s} = \cancel{u} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_A \vec{B}\,d\vec{a} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{a}}$$

falls unbewegte Materie

② Induzierte Spannung (auch ohne Leiterschleife)

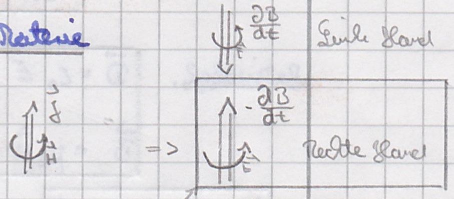
ind. Spng.

$$\oint_{\partial A} \vec{E}\,d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_A \vec{B}\,d\vec{a} \overset{A = const}{=} \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,d\vec{a}$$

$\iint_A \text{rot}\,\vec{E}\,d\vec{a}$ ⇓ Satz von Stokes

nicht bewegte Materie

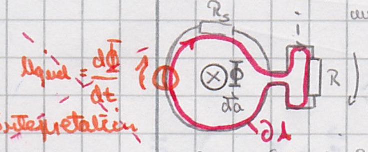
↳ Ind. Gesetz lokale Form: $\boxed{\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$ vgl. $\text{rot}\,\vec{H} = \vec{J}$



bevorzugte Interpretation falls keine Leiterschleife

Bsp 6.4

aus 1. Interpretation



$u_R = -\frac{R}{R+R_S}\frac{d\Phi}{dt}$

entlang der Leiterschleife

2. Interpretation $\oint \vec{E}\,d\vec{s} = R_S i + R i = -\frac{d\Phi}{dt}$

$i = -\frac{1}{R_S + R}\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow u_R = R\cdot i = -\frac{R}{R_S + R}\frac{d\Phi}{dt}$

nur obere Fläche

$$\Phi = \iint \vec{B}\,d\vec{a} = \iint \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho}\,d\rho\,dz = 2\cdot\int_a^{2a}\int_0^{2a-\rho} \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho}\,dz\,d\rho = 2\cdot\int_a^{2a} \frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{2a-\rho}{\rho}\,d\rho = \frac{\mu_0 i}{\pi}\left[2a\ln\rho - \rho\right]_a^{2a}$$

$H = \frac{i}{2\pi\rho} \Rightarrow B = \mu_0 H$

$$= \frac{\mu_0 i}{\pi}\left[2a\ln(2) - a\right] = \mu_0\, i\, a\, \frac{2\ln 2 - 1}{\pi}$$

$$\Rightarrow u_R = -\frac{R}{R+R_S}\mu_0 a \frac{2\ln 2 - 1}{\pi}\cdot\frac{di}{dt}$$

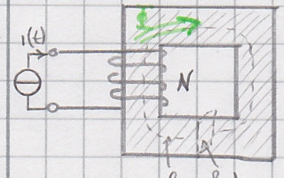
$i(t) = 2\,A\,\sin(\omega t)$

$\frac{di}{dt} = 2\,A\,\omega\cos(\omega t)$

$\Rightarrow u_R(t) \approx -4{,}7531\,\mu V\cos(\omega t)$

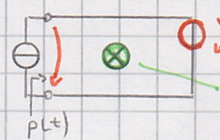
Selbstinduktion aufgrund geringen Stromes i_S vernachlässigt.

Energie im Magnetfeld ← erst hier, da Begründung basierend durch Induktionsgesetz



Anfang: $t_A, i(t_A)$
Ende: $t_E, i(t_E)$ } $i(t)$

ESB ⇒



$\Phi_v = \sum \Phi_i \approx N\cdot\Phi$

Ersatzverkettungsfluss

$p(t) = i(t)\,u_{q\,ind}(t) = i(t)\frac{d\Phi_v}{dt}$

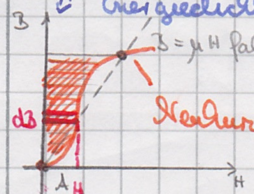
$W_m(t_E) - W_m(t_A) = \int_{t_A}^{t_E} p(t)\,dt$ } $\Delta W_m = \int_{\Phi_{vA}}^{\Phi_{vE}} i\,d\Phi_v$ mit $\Phi = B_{Fe}\cdot A_{Fe}$

$H_{Fe}\,l_{Fe} = N\cdot I$ (Durchflutungsgesetz)

$\Phi_v = N\Phi$

$$\Delta W_m = \int \frac{H_{Fe}\,l_{Fe}}{N}\cdot N\cdot A_{Fe}\cdot dB_{Fe} = V_{Fe}\int H_{Fe}\,dB_{Fe} = V_{Fe}\int_{B_A}^{B_E} H\,dB$$

⇓ Energiedichteänderung $\Delta w_m = \frac{\Delta W_m}{V_{Fe}} = \int_{B_A}^{B_E} H\,dB$



$\boxed{dw_m = H\,dB}$ magn. Energiedichteänderung bei Variation der magn. Flussdichte um dB

wenn nicht linear aber isotrop ⇒ ohne Beweis $\boxed{dw_m = \vec{H}\cdot d\vec{B}}$ allgemein

250 $$\int_0^{B_E} H\,dB \overset{\text{linear}}{=} \int_0^{B_E} \frac{B}{\mu}\,dB = \frac{B_E^2}{2\mu} = \frac{\mu^2 H_E^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\mu H_E^2$$

magn. Energiedichte (linear) + isotrop: $\boxed{w_m = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} B H}$

6.3 Satz der Maxwell-Gleichungen (ruhende Materie)

255 integrale Form:

$$\begin{aligned}
&\oint_{\partial V} \vec D\, d\vec a = Q_V = \iiint_V \eta\, dv \\
&\oint_{\partial V} \vec B\, d\vec a = 0 \\
&\oint_{\partial A} \vec E\, d\vec s = -\iint_A \frac{\partial \vec B}{\partial t}\, d\vec a \\
&\oint_{\partial A} \vec H\, d\vec s = \underbrace{\iint_A \vec J\, d\vec a}_{I_A} + \iint_A \frac{\partial \vec D}{\partial t}\, d\vec a
\end{aligned}$$

Gauß

Stokes

lokale Form:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\vec D = \eta \\
&\operatorname{div}\vec B = 0 \\
&\operatorname{rot}\vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t} \\
&\operatorname{rot}\vec H = \vec J + \frac{\partial \vec D}{\partial t}
\end{aligned}$$

8 skalare Gleich.

4 · 3 = 12 Unbekannte

Materialgl.:

$$\begin{aligned}
\vec D &= \varepsilon_0 \vec E + \vec P \overset{\text{linear}}{=} \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\varepsilon}_r \vec E \\
\vec B &= \mu_0 \vec H + \mu_0 \vec M \overset{\text{linear}}{=} \mu_0 \overleftrightarrow{\mu}_r \cdot \vec H
\end{aligned}$$

$\boxed{\vec J = \underbrace{\vec J_e}_{} + \overleftrightarrow{\varkappa} \cdot \vec E}$

eingeprägte Stromdichte (vgl. Stromquelle)

in Quellen $\vec J_e, \eta_e$ — außerhalb der Quellen $\varkappa \cdot \vec E, \eta$

$$\operatorname{div}\vec J + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

6.4 Lösung der Maxwell-Gleichungen (Vorüberlegungen)

256 nur stückweise homogen, isotrop und linear: $\vec D = \varepsilon \vec E$; $\vec B = \mu \vec H$; $\vec J = \vec J_e + \varkappa \vec E$ — unabhängig von $\vec r$

außerhalb der Quellen raumladungsfrei => $\eta = \eta_e$ (Begründung siehe Skript)

=> $\varepsilon \operatorname{div}\vec E = \eta_e$; $\mu \operatorname{div}\vec H = 0$; $\operatorname{rot}\vec E = -\mu \frac{\partial \vec H}{\partial t}$; $\operatorname{rot}\vec H = \vec J_e + \varkappa \vec E + \varepsilon \frac{\partial \vec E}{\partial t}$