

$$\int_0^B H dB = \int_0^B \frac{1}{\mu} B dB = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{\mu^2 H^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2$$

magn. Energiedichte (linear): $w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} B H$
+ isotrop

6.3 Satz der Maxwell - Gleichungen (rotierende Materie)

integrale Form:

$$\oint_V \vec{D} d\vec{a} = Q_v = \iiint_V \rho dv$$

$$\oint_V \vec{B} d\vec{a} = 0$$

$$\oint_{\partial V} \vec{E} d\vec{s} = - \iint_A \frac{d\Phi}{dt} d\vec{a}$$

$$\oint_{\partial V} \vec{H} d\vec{s} = \iint_A \vec{j} d\vec{a} + \iint_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{a}$$

lokale Form:

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

8 skalare Gleich.
4-3 = 12 Nullbedingung
ist kein Randwert
ist kein Randwert
ist kein Randwert
ist kein Randwert
ist kein Randwert
ist kein Randwert

Materialgl.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \stackrel{\text{linear}}{=} \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \stackrel{\text{linear}}{=} \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}_m \cdot \vec{E}$$

in Quellen \vec{j}_e und \vec{j}_m
außerhalb der Quellen $\vec{j}_e \cdot \vec{E}, \vec{j}_m$
 $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

verprägte Stromdichte (vgl. Stromquelle)

6.4 Lösung der Maxwell - Gleichungen (Variationsrechnung)

stichweise
nur \vec{D} homogen, isotrop und linear

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} ; \vec{B} = \mu \vec{H} ; \vec{j} = \vec{j}_e + \mu \vec{E}$$

außerhalb der Quellen raumladungsfrei $\Rightarrow \rho = \rho_e$ (Begründung siehe Skript) und nicht dispersiv

$$\Rightarrow \epsilon \text{div } \vec{E} = \rho_e ; \mu \text{div } \vec{H} = 0 ; \text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} ; \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_e + \epsilon \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

5.06.2014

$w_H \text{div } \vec{E} = \vec{E} d\vec{D}$ } allgemeiner Fall
 $w_m \text{div } \vec{H} = \vec{H} d\vec{B}$ } auch multilinear und anisotrop
 falls linear und isotrop $\omega_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$
 $\omega_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$

ref. E-Strahlung $\text{rot } \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\text{grad } \varphi$ \rightarrow Potential $\varphi(\vec{r})$

falls $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$ $\text{rot } \vec{E} \neq 0 \Rightarrow$ Potential existiert nicht

Elektrodynamische Potentiale (Ljapofelekt)

$\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow$ es existiert $\vec{A}(\vec{r}, t)$ mit $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ \leftarrow $\text{div } \vec{A}$ geeignet wählen (Eichung)

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = \text{rot} \left(- \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \Rightarrow \text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \text{grad } \varphi$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \rightarrow \text{rot } \vec{E} = \text{rot} \left(-\text{grad } \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = 0 - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = -\text{grad } \varphi$$

! Ljapofelekt \neq Skalarpotential!
! z.B. $\Delta \varphi_1 \neq \varphi_1 - \varphi_2$

PDGL für $\vec{A}(\vec{r}, t)$ und $\varphi(\vec{r}, t)$ homogen, isotrop, linear und $\rho = 0$

$$\Rightarrow \text{div}(\epsilon \vec{E}) = \rho_e \Rightarrow \epsilon \text{div} \left(-\text{grad } \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\rho_e$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{H} = \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \vec{B} \right) = \frac{1}{\mu} \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \frac{1}{\mu} \text{grad grad } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \vec{j}_e + \epsilon \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu \vec{j}_e + \epsilon \mu \left(-\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \epsilon_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j}_e + \text{grad}(\text{div} \vec{A} + \epsilon_0 \mu \varphi + \epsilon_0 \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t})$$

= 0 Eichung

Eichung: $\text{div} \vec{A} + \epsilon_0 \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \epsilon_0 \mu \varphi = 0$

PDGL für $\vec{A} \Rightarrow \Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \epsilon_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j}_e$

$\text{div} \vec{A} = -\epsilon_0 \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \epsilon_0 \mu \varphi$ $\Delta \vec{A}$ in Ballkl. Anregung

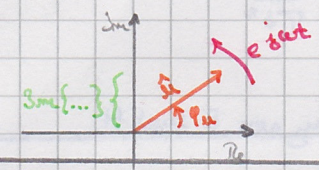
$\Delta \varphi - \epsilon_0 \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \epsilon_0 \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0}$ PDGL für $\varphi(\vec{r}, t)$

$\Delta \varphi$ in Ballkl. \Rightarrow Poisson-Gleichung

Vorbereitungen zur Lösung der PDGL

$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t) \stackrel{z.B.}{=} \vec{A}(x, y, z, t)$ $\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot u = 0 \rightarrow u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) = \text{Im} \{ \hat{u} e^{j\omega t} \}$

$\varphi = \varphi(\vec{r}, t) = \varphi(x, y, z, t)$ $\frac{du}{dt} \rightarrow j\omega \hat{u}$



$u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u) = \text{Re} \{ \hat{u} e^{j\omega t} \}$ mit $\hat{u} = \hat{u} e^{j\varphi_u}$
 \rightarrow auf horizontale Achse projizieren

$\begin{cases} \text{Re} \{ \delta^y \} = \cos \varphi \\ \text{Im} \{ \delta^y \} = \sin \varphi \end{cases}$

$f(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \hat{f}(\vec{r}) e^{j\omega t} \}$ mit $\hat{f}(\vec{r}) \hat{=} \text{komplexe Amplitude}$ und ω

$F(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \hat{F}(\vec{r}) e^{j\omega t} \}$ mit $\hat{F}(\vec{r}) \hat{=} \text{komplexe Amplitudenwert}$

\hookrightarrow phasorweise für ebene Wellen: Signale und Frequenz

$\Rightarrow \frac{d}{dt} \rightarrow j\omega$

z.B. $u = \frac{d}{dt} \hat{u} \rightarrow \hat{u} = j\omega \hat{u}$
 $i = C \frac{du}{dt} \rightarrow \hat{i} = j\omega C \hat{u}$

Verteilte Lösung im Zeit-/Frequenzbereich

1) $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$

2) evtl. dispersive Materie Fallung \rightarrow Produkt

$\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) - j\epsilon''(\omega)$
 $\mu(\omega) = \mu'(\omega) - j\mu''(\omega)$

PDGL für \vec{A} und φ

$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \rightarrow j\omega \vec{A}$
 $\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \rightarrow (j\omega)^2 \vec{A} = -\omega^2 \vec{A}$

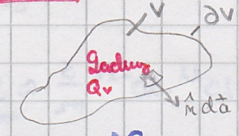
PDGL für $\vec{A}(\vec{r})$ und $\varphi(\vec{r})$
 Lösung duplex (z.B. Quell) \rightarrow rechte Leit. = 0 \rightarrow Wellenwiderstand (z.B. 0) $\rightarrow \epsilon_0 \mu \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$
 oder Klein Effekt mit $\epsilon_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \approx 0$

$\Delta \vec{A} + (\omega^2 \epsilon \mu - j\omega \epsilon \mu \sigma) \vec{A} = -\mu \vec{j}_e$ und $\Delta \varphi + (\omega^2 \epsilon \mu - j\omega \epsilon \mu \sigma) \varphi = -\frac{\rho_e}{\epsilon}$

$\boxed{k^2 = \omega^2 \epsilon \mu - j\omega \epsilon \mu \sigma}$ $k \hat{=} \text{Wellen "zahl"}$ $= k^2$

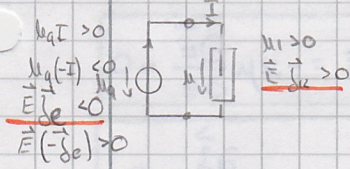
4) Energie im elektromagnetischen Feld

Ladungserhaltung

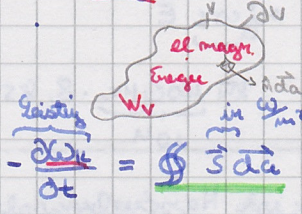


$\oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{a} = -\frac{dQ_v}{dt}$

$Q_v \uparrow$ falls $\int \vec{j}_v \cdot \vec{e}_v < 0$
 $Q_v \downarrow$ falls $\int \vec{j}_v \cdot \vec{e}_v > 0$



Energieerhaltung



$W_v = \iiint_V (\omega_e + \omega_m) dV$

$\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{a} = \iiint_V \text{div} \vec{S} dV$

$-\frac{dW_v}{dt} = \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{a} + \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{e}_v dV$

$W_v \downarrow$ falls Verluste (Wärme) und/oder Energiefluss nach nach außen
 $W_v \uparrow$ falls $\vec{j} \cdot (\vec{e}_v - \vec{e}_v)$; Quasiquellen oder Energieerzeugung
Quellen

\rightarrow lokal $V \quad -\frac{\partial w}{\partial t} = \text{div} \vec{S} + \vec{j} \cdot \vec{e}_v$ lokale Erhaltungssatz

$\boxed{-\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{e}_v \cdot (-\vec{j}_e) = \text{div} \vec{S} + \vec{e}_v \cdot \vec{j}_e}$

8.2 Energiefluss und Poynting Vektor \vec{S}

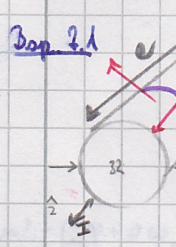
$$\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) \stackrel{\text{Vektor}}{=} \vec{H} \text{ rot } \vec{E} - \vec{E} \text{ rot } \vec{H} = \vec{H} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{E} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -\vec{H} \frac{d\vec{B}}{dt} - \vec{E} \cdot \vec{j} - \vec{E} \cdot \frac{d\vec{D}}{dt}$$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{S} = \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) \quad \text{da } \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$d\omega_e = \vec{E} d\vec{D}$
 $d\omega_m = \vec{H} d\vec{B}$

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

Poynting Vektor \rightarrow Verschiebung mit \vec{S} nicht definiert. Siehe Seite 268



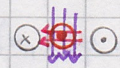
$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{\pi b^2}$

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \left(-\hat{\phi} \right) \frac{I^2}{2\pi b^2} \hat{\phi}$
 Parallel zur Mantelfläche aber keine Energie im Leiter fließen

rechnet auf Oberfläche

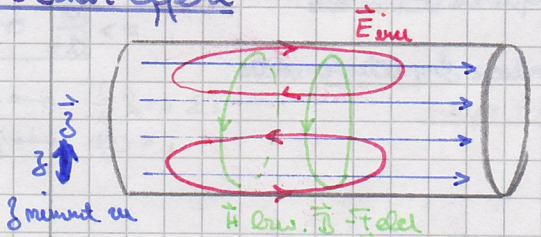
$\vec{j} = \frac{I}{\pi b^2} \hat{z} \rightarrow \vec{E} = \dots + \hat{z} \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{I}{2\pi b^2}$

$\oint_{\text{Mantelfläche}} \vec{S} \cdot d\vec{a} = \frac{I}{2\pi b^2} \cdot \frac{I}{2\pi b} \cdot \frac{2\pi b \cdot l}{\text{Fläche}} = 2I^2$
 $\rightarrow R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{\pi b^2}$



8.2 Lösungen der Maxwell-Gleichungen bei unvollständiger Stopplung von E und H

8.2 Skin Effekt



$\vec{j}_{\text{inner}} = \sigma \vec{E}_{\text{inner}} + \text{entgegengesetzt zu } \vec{j} \text{ im Inneren}$
 $+ \text{parallel zum } \vec{j} \text{ am Rand}$

Skin-Effekt / Stromverdrängung

Effekt umso größer + je höher ω (schnellere Änderung $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \uparrow$)
 + $\vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow$ je höher μ (da $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \uparrow$)
 + je größer σ (wegen $\vec{j}_{\text{inner}} = \sigma \vec{E}_{\text{inner}}$)

quantitative Betrachtung des Skin-Effekts σ, μ, l (homogen, isotrop, linear) $\eta = 0$ außerhalb der Quellen

$(\rho_e = 0, \vec{j}_e = 0) \Rightarrow \epsilon \text{div } \vec{E} = 0; \mu \text{div } \vec{H} = 0; \text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \text{rot } \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

guter Leiter $\rightarrow \sigma$ groß (z.B. $\sigma_{\text{Cu}} \approx 56 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}$)

$e^{j\omega t} \rightarrow \sigma \vec{E} + j\omega \epsilon \vec{E}$
 z.B. $\sigma_{\text{Cu}} \quad 2\pi \cdot 100 \text{ GHz} \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \approx 50 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-12} \frac{\text{S}}{\text{m}} \approx 5 \frac{\text{S}}{\text{m}}$
 $56 \cdot 10^6 \rightarrow \uparrow \downarrow$

\rightarrow in guten Leitern ist Nerschwingungsstromlicht $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ sehr viel kleiner als Leitungsstromlicht $\sigma \vec{E}$

$\Rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$
 $\text{rot } \vec{H} = \sigma \vec{E}$
 $\text{rot rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H}$
 $\text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \sigma \vec{E}$
 $= 0$

$\Delta \vec{E} = -\sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$

$\Delta \vec{j} = -\sigma \mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0$

oder $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

Lösung dieser PDGL (von Wärmeleitungstyp)

$\vec{j}(\vec{r}, t)$ mit 4 Unabhängigen $\rightarrow \vec{j}(\vec{r})$ mit 3 Unabhängigen
 nur cos-förmige Abhängigkeit $\Rightarrow \Delta \vec{j} - j\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{j} = 0$ mit $\vec{j}(\vec{r})$ mit 3 Unabhängigen

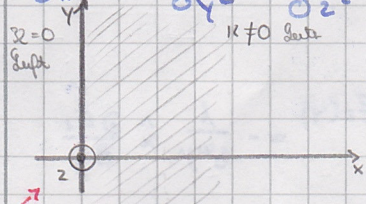
$\sqrt{-1} = ? = z$ d.h. $z^2 = -1 \rightarrow z = \pm i$ $\Rightarrow j^2 e^{z\phi} = -j = e^{z\sqrt{-1}\phi}$
 \downarrow
 $= 1$ $\phi = \pm \frac{\sqrt{-1}}{2}$

$y^2 = j\omega \epsilon_0 \mu_0 \Rightarrow y = \sqrt{j\omega \epsilon_0 \mu_0}$
 $\Rightarrow \sqrt{j} = \pm e^{j\frac{\sqrt{-1}}{4}} = \pm \frac{1+j}{2}$

$\Rightarrow y = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \epsilon_0 \mu_0} = \frac{1+j}{\delta}$ mit $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \epsilon_0 \mu_0}}$

↓ Vert. Blochdichte $\vec{j} = \vec{j}_z \hat{z}$ $\hookrightarrow \delta =$ **Dringungstiefe**

$\frac{\partial^2 \vec{j}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{j}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{j}_z}{\partial z^2} - y^2 \vec{j}_z = 0$ **Spezialfall**
 $\vec{j}(\vec{r}) = \vec{j}_z(x) \hat{z}$



Symmetrie $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ $\Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{j}_z}{\partial x^2} - y^2 \vec{j}_z = 0$ DGL für $\vec{j}_z(x)$

mit $\vec{j}_z(0) = \vec{j}_{z0}$ (1) und $\vec{j}_z(x) |_{x \rightarrow +\infty} = 0$ **welcher** (2)

$\rightarrow e^{\lambda x}$ -Ansatz (homogene Lösung) $\lambda^2 e^{\lambda x} - y^2 e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm y$

$\vec{j}_z(x) = \underbrace{\Delta_1}_{\Delta_1 = \vec{j}_{z0}} e^{-y x} + \underbrace{\Delta_2}_{\Delta_2 = 0 \text{ wegen (2)}} e^{+y x}$ mit $y = \frac{1+j}{\delta}$ $\Rightarrow \vec{j}_z(x) = \vec{j}_{z0} e^{-y x} = \vec{j}_{z0} e^{-\frac{1+j}{\delta} x}$ **Betrag = 1**

Stark ausgeprägter Skin Effekt

bei $x = \delta$ Betrag auf $\frac{1}{e} \approx 37\%$ abgefallen

12.06.2014 WH

$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = -\mu \vec{j}_e$ (attribution) **homogen, linear, zeitlich, nicht dispersiv, $\epsilon = 0$ außerhalb der Quellen**
 $\Delta \varphi - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon}$

Skin-Effekt in sehr guten Leitern ($\epsilon E \gg \epsilon E$) $\rightarrow \Delta \vec{F} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} = 0$ **außerhalb der Felderquellen für \vec{E}, \vec{H} oder \vec{j}**
 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ gegen $\epsilon \vec{E}$ vernachlässigbar

Dringungstiefe $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \epsilon_0 \mu_0}}$ z.B. $f = 100 \text{ kHz}$; $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Vm}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$ $\Rightarrow \delta \approx \sqrt{\frac{2}{2\pi \cdot 10^5 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}}$
 $\approx \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{10^6}} \text{ m} \approx 0,152 \text{ mm}$

Bsp. 8.1

$\vec{j}(\vec{r}, t) = \hat{z} j_z(y, t)$
 $\Delta \vec{j} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{j}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \hat{z} \Delta j_z - \epsilon_0 \mu_0 \hat{z} \frac{\partial^2 j_z}{\partial t^2} = 0$
 $\hookrightarrow \frac{\partial^2 j_z}{\partial y^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 j_z}{\partial t^2} = 0$ (Wellengleichung)

Wellenbereich

$\frac{\partial^2 j_z}{\partial y^2} - j\omega \epsilon_0 \mu_0 j_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 j_z}{\partial y^2} = y^2 j_z$ $\leftarrow j_z(y)$

$y_1^2 = j\omega \epsilon_0 \mu_0$ $\Rightarrow j_z(y) = \begin{cases} \underline{F}_0 e^{y_1 y} + \underline{G}_0 e^{y_2 y} & \text{oben} \\ \underline{F}_m e^{y_1 y} + \underline{G}_m e^{y_2 y} & \text{Mitte} \\ \underline{F}_\mu e^{y_1 y} + \underline{G}_\mu e^{y_2 y} & \text{unten} \end{cases}$ **6 Unbekannte**