Lösung dieser PDGL (vom Wärmeleitungstyp)

$\vec{J}(\vec{r},t)$ mit 4 Unabhängigen $\longrightarrow \vec{J}(\vec{r})$. nur cos-förmige Zeitabhängigkeit $\Rightarrow \boxed{\Delta\vec{J} - j\omega\kappa\mu\vec{J} = 0}$ mit $\vec{J}(\vec{r})$ mit 3 Unabhängigen

$\gamma^2 = j\omega\kappa\mu \Rightarrow \gamma = \sqrt{j}\sqrt{\omega\kappa\mu}$

$\sqrt{j} = ? = z$ d.h. $z^2 = j \rightarrow z = \rho e^{j\phi} \Rightarrow \underset{=1}{\rho^2} e^{2j\phi} = j = e^{j\frac{\pi}{2}}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \sqrt{j} = \pm e^{j\frac{\pi}{4}} = \pm\frac{1+j}{2} \Rightarrow$

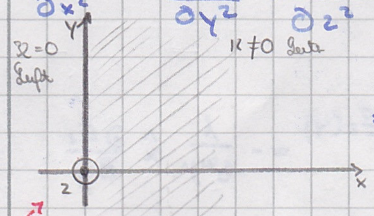
$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\kappa\mu} = \frac{1+j}{\delta} \text{ mit } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\kappa\mu}}}$$

$\hookrightarrow \delta =$ Eindringtiefe

kart. Koordinaten $\vec{J} = J_z\hat{z}$

$$\frac{\partial^2 J_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J_z}{\partial z^2} - \gamma^2 J_z = 0$$

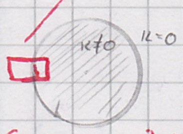
Spezialfall: $\vec{J}(\vec{r}) = J_z(x)\cdot\hat{z}$



Symmetrie $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 J_z}{\partial x^2} - \gamma^2 J_z = 0}$ DGL für $J_z(x)$

mit $J_z(0) = \underline{J_{z0}}$ (1) und $J_z(x)\big|_{x\to+\infty}$ endlich (2)

$\rightarrow e^{\lambda x}$-Ansatz (homogene Lösung) $\lambda^2 e^{\lambda x} - \gamma^2 e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\gamma$



$J_z(x) = \underbrace{\underline{A_1}}_{\underline{A_1} = J_{z0}} e^{-\gamma x} + \underbrace{\underline{A_2}}_{\underline{A_2} = 0 \text{ wegen (2)}} e^{+\gamma x}$ mit $\gamma = \frac{1+j}{\delta}$

$$\Rightarrow \boxed{J_z(x) = J_{z0}\, e^{-\gamma x} = J_{z0}\, e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-j\frac{x}{\delta}}}$$

Betrag $= 1$

Stark ausgeprägter Skin Effekt

bei $x = \delta$ Betrag auf $\frac{1}{e} \approx 37\%$ abgefallen

12.06.2014 WH
$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\vec{A} - \kappa\mu\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu\vec{J}_e \\ \Delta\varphi - \kappa\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\eta_e}{\varepsilon} \end{aligned}}$$

(stückweise) homogen, linear, isotrop, nicht dispersiv, $\eta = 0$ außerhalb der Quellen

Skin-Effekt in sehr guten Leitern ($\kappa E \gg \varepsilon E$) $\rightarrow \boxed{\Delta\vec{F} - \kappa\mu\frac{\partial\vec{F}}{\partial t} = 0}$ außerhalb der Feldursachen für $\vec{E}, \vec{H}$ oder $\vec{J}$

$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ gegen $\kappa\vec{E}$ vernachlässigbar

Eindringtiefe $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\kappa\mu}}}$ z.B. $f = 100\,kHz$; $\kappa = 50\cdot10^6\,\frac{S}{m}$, $\mu = \mu_0 = 4\pi\,10^{-7}\,\frac{Vs}{Am}$ $\Rightarrow \delta \approx \sqrt{\frac{2}{2\pi\cdot f\cdot\kappa\cdot\mu}}$

$\approx \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{10^6}}\,m \approx 0{,}32\,mm$

25 **Bsp. 8.1**

$\underline{\vec{J}(\vec{r},t)} = \hat{z}\,J_z(y,t)$

$\Delta\vec{J} - \kappa\mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} = 0 \Longrightarrow \hat{z}\,\Delta J_z - \kappa\mu\,\hat{z}\frac{\partial J_z}{\partial t} = 0$

$\hookrightarrow \underline{\frac{\partial^2 J_z}{\partial y^2} - \kappa\mu\frac{\partial J_z}{\partial t} = 0}$ $\quad J_z(y,t)$ (Zeitbereich)

$\Downarrow e^{j\omega t}$

Bildbereich

$$\frac{\partial^2 J_z}{\partial y^2} - \overbrace{j\omega\kappa\mu}^{\gamma^2} J_z = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 J_z}{\partial y^2} = \gamma^2 J_z \quad J_z(y)$$

$\gamma_1^2 = j\omega\kappa_1\mu_0$

$\gamma_2^2 = j\omega\kappa_2\mu_0$

$$\Rightarrow J_z(y) = \begin{cases} \underline{F_0}\, e^{\gamma_2 y} + \underline{G_0}\, e^{\gamma_2 y} & \text{oben} \\ \underline{F_m}\, e^{\gamma_1 y} + \underline{G_m}\, e^{\gamma_1 y} & \text{Mitte} \\ \underline{F_u}\, e^{\gamma_2 y} + \underline{G_u}\, e^{\gamma_2 y} & \text{unten} \end{cases}$$

6 Unbekannte

Symmetrie $J_z(y)$ gerade in $y \Rightarrow \underline{F}_{m} = \underline{G}_{m}$ z.B. $+d$ & $-d$ ansetzen $\Rightarrow \underline{F}_0 = \underline{G}_0$ & $\underline{F}_\mu = \underline{G}_0$

$$J_z(-y) = J_z(y)$$

$$J_z(y) = \begin{cases} \underline{B} e^{\gamma_2 y} + \underline{C} e^{-\gamma_2 y} & \text{oben} \\ \underline{A} e^{\gamma_1 y} + \underline{A} e^{-\gamma_1 y} & \text{mitte} \\ \underline{C} e^{\gamma_2 y} + \underline{B} e^{-\gamma_2 y} & \text{unten} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 3 Unbekannte

(I Gl.)

$\underline{E}_z = \frac{1}{\kappa} J_z$ stetig (1. Gl.) bei $+d$ $\rightarrow$ $\underline{\frac{1}{\kappa_2}\left(\underline{B} e^{\gamma_2 d} + \underline{C} e^{-\gamma_2 d}\right) = \frac{1}{\kappa_1}\left(\underline{A} e^{\gamma_1 d} + \underline{A} e^{-\gamma_1 d}\right)}$

$\rightarrow$ J_n stetig $\Rightarrow$ nützt nichts

D_n stetig $\Rightarrow$ – " –

B_n stetig $\rightarrow$ nur x-Komponente $\Rightarrow$ nur H_x $\rightarrow$ nützt nicht

H_{tan} stetig $\Rightarrow$ H_x stetig

$$\Rightarrow \operatorname{rot}(\underline{\vec{E}}) = -j\omega\mu \underline{\vec{H}} \Rightarrow \underline{\vec{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu} \operatorname{rot} \underline{\vec{E}} \quad \hat{z}\, \underline{E}_z(y) \quad = -\frac{1}{j\omega\mu}\, \hat{x}\, \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}$$

$\underline{H}_x = -\frac{1}{j\omega\mu\kappa} \frac{\partial J_z}{\partial y}$ gilt in jeder der 3 Schichten

$$\underline{H}_x(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\gamma_2}\left(\gamma_2 \underline{B} e^{\gamma_2 y} - \underline{C} e^{-\gamma_2 y}\right) & \text{oben} \\ -\frac{1}{\gamma_1}\left(\gamma_1 \underline{A} e^{\gamma_1 y} - \underline{A} e^{-\gamma_1 y}\right) & \text{mitte} \\ \ldots & \text{unten} \end{cases}$$

(2. Gl.)

$\underline{H}_x$ stetig bei $y = d \Rightarrow$ $\underline{-\frac{1}{\gamma_2} \underline{B} e^{\gamma_2 d} + \frac{1}{\gamma_2} \underline{C} e^{-\gamma_2 d} = -\frac{1}{\gamma_1} \underline{A} e^{\gamma_1 d} + \frac{1}{\gamma_1} \underline{A} e^{-\gamma_1 d}}$

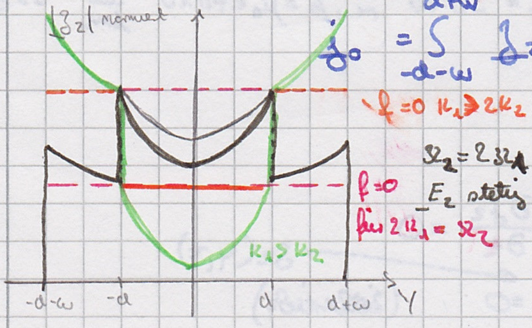
$\cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$

$\sinh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$ für Skript

$$d\underline{I} = J_z\, dx\, dy \Rightarrow \frac{d\underline{I}}{dx} = J_z\, dy$$

$$J_0 = \int_{-d-w}^{d+w} J_z(y)\, dy \Rightarrow 3 \text{ Gl. siehe Skript}$$

S 282



$\kappa_2 = 2\kappa_1$ $\rightarrow$ kleiner f

$\underline{E}_z$ stetig $= \frac{1}{\kappa} J_z$ stetig

8.3 8 Bsp. 8.3/8.4
siehe Prüfungsordner

288 12.06.14

(5) Lösungen der Maxwell-Gleichungen bei vollständiger Kopplung von E und H

- $\varkappa, \mu, \varepsilon$ nicht disp. etc.

$\varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = \varrho_e$ → außerhalb der Feldursachen

$\mu \operatorname{div} \vec{H} = 0$

$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ → $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_e + \cancel{\varkappa \vec{E}} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ → $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\vec{H} \Rightarrow \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ $\quad$ $\vec{E} \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\boxed{\vec{H} \Longleftrightarrow \vec{E}}$

→ Kopplung auch im Vakuum

Abstrahlung und Ausbreitung el. magn. Wellen

- $\varkappa, \mu, \varepsilon$ nicht disp. $\quad \varkappa = 0$

$$\left.\begin{aligned} (1)\quad & \Delta \vec{A} - \underbrace{\varepsilon\mu}_{1/c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j}_e \\ (2)\quad & \Delta \varphi - \underbrace{\varepsilon\mu}_{1/c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\varrho_e}{\varepsilon} \end{aligned}\right\} \text{inhomogene PDGL}$$

Def.: $\varepsilon\mu = \frac{1}{c^2}$ bzw $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}$

außerhalb der Quellen $\Rightarrow$

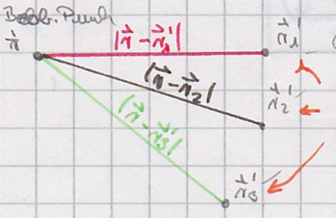
$$\left.\begin{aligned} (3)\quad & \Delta \vec{E} - \underbrace{\varepsilon\mu}_{1/c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ (4)\quad & \Delta \vec{H} - \underbrace{\varepsilon\mu}_{1/c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}\right\} \text{homogene PDGL}$$

Lösung für (1)&(2) für gegebene $\vec{j}_e$ und ϱ_e im unendlich ausgedehnten homogenen Raum (i.d.R. Vakuum mit $\varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0$)

?? $\vec{j}_e$ ϱ_e ?? ?? ??

$\Delta \varphi = -\frac{\varrho_e}{\varepsilon} \Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \frac{\varrho_e(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dv'$ (E-Statik)

$\Delta \vec{A} = -\mu \cdot \vec{j}_e \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}_e(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dv'$ (Magnetostatik)

294 

$\vec{r}_1'$ Orte mit Ursachen

← Zeitliche Änderung machen sich erst ~~nach~~ verzögert am Ort $\vec{r}$ bemerkbar

↳ Verzögerung $\hat{=} \frac{\text{Abstand}}{\text{Geschwindigkeit}}$ → $\Delta t = \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{v} \Rightarrow \varphi(\vec{r}, t)$

$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \frac{\varrho_e(\vec{r}\,', t - \Delta t)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dv'$

$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}_e(\vec{r}\,', t - \Delta t)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dv'$

in PDGL → $v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \hat{=}$ Ausbreitungsgeschw. el. magn. (Lichtgeschwindigkeit)

→ Verzögerung $\hat{=}$ Retardierung → $\vec{A}$ und φ retardierte Potentiale

$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c_0 = 2{,}997 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = 300'000 \frac{km}{s}$ im Vakuum

$\vec{B}(\vec{r}, t) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}, t)$

$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

295 Lösung für (3)&(4) (mögliche Lösungen außerhalb der Ursachen) → Gedanken an mögl. homogene Lösung (z.B. ebene Welle, Kugelwelle, ...)

1D-Problem → x mit $\partial/\partial x \neq 0$ (aber $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$)

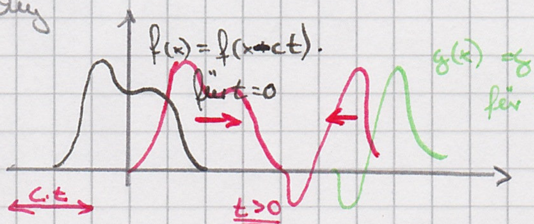
$$\left.\begin{aligned} & E_y(x,t) \\ & E_z(x,t) \\ & H_y(x,t) \\ & H_z(x,t) \end{aligned}\right\} \to u(x,t)$$

$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$ oder $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$

1D-Wellengleichung

$\boxed{u(x,t) = \underbrace{f}_{\text{beliebig}}(x - ct) + \underbrace{g}_{\text{beliebig}}(x - ct)}$

Ausbreitung in +x Richtung $\quad$ Ausbreitung in -x-Richtung



$f(x - x_0)$ Verschiebung um x_0 nach Rechts oder $u(x,t) = \underbrace{\tilde{f}\left(t - \frac{x}{c}\right)}_{+x\text{-Richtung}} + \underbrace{\tilde{g}\left(t + \frac{x}{c}\right)}_{-x\text{-Richtung}}$

$\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$ $\qquad$ $\Delta t = -\frac{\Delta x}{c}$ $\quad \to \boxed{\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| = c} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ = Geschw. mit der sich das Muster f bzw. g ausbreitet

$\Downarrow$

Spezialfall: $\tilde{f}(t) = u_0 \cos(\omega t + \alpha_0)$ $\qquad$ Wellenzahl $\to \boxed{k = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}}$

$$\underline{u(x,t)} = \tilde{f}\left(t - \frac{x}{c}\right) = u_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha_0\right) = u_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x + \alpha_0\right) = \underline{u_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_0)}$$

in +x-Richtung laufende harmonische Welle

periodisch in t mit $\omega T = 2\pi \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}}$ <u>Periodendauer</u>

periodisch in x $\Rightarrow k x_p = 2\pi = k \cdot \lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$ <u>Wellenlänge</u>

297 $c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ $\qquad \Rightarrow \boxed{\lambda = cT = \frac{c}{f}}$ $\qquad$ $f = 50\,Hz \Rightarrow \lambda = 6000\,km$ Wellenlänge

$f = 1\,GHz \to \lambda = 0{,}3\,m = 30\,cm$

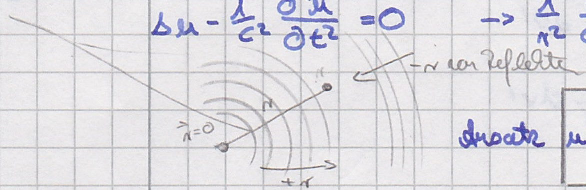
$f = 60\,GHz \to \lambda = 5\,mm$

<u>1-D-Problem mit</u> $u(\vec{r},t) = u(\underset{\text{Abstand vom Ursprung}}{r}, t) = u(r, \vartheta, \phi, t)$ mit $\frac{\partial}{\partial\vartheta} = \frac{\partial}{\partial\phi} = 0 \to$ keine Richtungsabhängigkeit

$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \to \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0$ $\qquad \Rightarrow$ Lösung für $u(r,t) = ?$

$\hookrightarrow$ math. Vorlesung siehe Skript

$\Uparrow$ Einsetzen als Beweis



Ansatz $\boxed{u(r,t) = \frac{\tilde{f}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{\tilde{g}\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r}}$