Fachhochschule München
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
Prof. Dr. Joachim Erven

München, den 29.1.2008

Prüfung in Mathematik 1 (neue PO) WS 07/08

Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Hilfsmittel: 2 DIN A4 - Blätter eigene Aufzeichnungen, kein Rechner!

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen (denken Sie daran, zunächst den jeweiligen Definitionsbereich zu bestimmen!):

(i) $|x+5|-(x+5)=|x-5|-(x-5)$

(ii) $\operatorname{ld}(x^3)+2\operatorname{ld}\sqrt{20}+\operatorname{ld}(x^2)=\operatorname{ld}(x^5)-\operatorname{ld} x$ (Zur Erinnerung: $\operatorname{ld} x := \log_2 x$)

2. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}=(1,2,0)$, $\vec{b}=(5,2,-3)$ und $\vec{c}=(-3,t,3)$ (mit $t\in\mathbb{R}$).

(i) Zeigen Sie, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind.

(ii) Für welche(s) $t\in\mathbb{R}$ sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig, für welche(s) linear abhängig? Geben Sie im Falle der linearen Abhängigkeit einen der drei Vektoren als Linearkombination der beiden anderen an.

3. Von der reellen (3,3)-Matrix $A=\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$ ist lediglich bekannt, dass $\det A=-3$ ist. Geben Sie – mit entsprechender Begründung – die Werte folgender Determinanten an:

(i) $\det(3A)$ (ii) $\det(2A^{-1})$ (iii) $\det(5A)^{-1}$ (iv) $\det(A^{\mathrm{T}}A^{-1})$

(v) $\det\begin{pmatrix} a & b & c\\ a+d & e+b & f+c\\ g-d & h-e & i-f\end{pmatrix}$ (vi) $\det\begin{pmatrix} a & g & d\\ b & h & e\\ c & i & f\end{pmatrix}$

4. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der Matrizen $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -4\\ -1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$. Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

bitte wenden

5. Berechnen Sie – falls existent – elementar (d.h. ohne die Regel von de L´HOSPITAL!) die folgenden

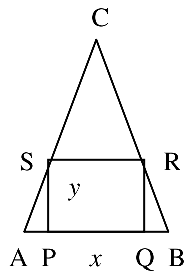
Grenzwerte: (i) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{3k-1+\frac{k}{2}\cdot\sqrt[3]{k}}{5\sqrt[3]{k^4}-\sqrt{k}+15}$ (ii) $\lim\limits_{k\to\infty} k\cdot\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{k}}\right)$

6. Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) = \begin{cases} x\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$.

(i) Zeigen Sie mittels Ableitungsdefinition, dass f in $x_0 = 0$ differenzierbar ist. Wie groß ist $f'(0)$?

(ii) Prüfen Sie, ob f in $x_0 = 0$ zweimal differenzierbar ist. Sie können dabei ohne Nachweis benutzen, dass f für $x_0 \neq 0$ beliebig oft differenzierbar ist.

7. In ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $c = \overline{\text{AB}}$ und Schenkeln $\overline{\text{AC}}$ und $\overline{\text{BC}}$ der Länge a soll ein Rechteck PQRS mit den Seiten x und y gemäß nebenstehender Skizze einbeschrieben werden.



(i) Wie müssen x und y gewählt werden, damit die Fläche des Rechtecks maximal ist?

(ii) Wie groß ist diese Maximalfläche (in Abhängigkeit von a und c)?

(iii) Wie groß ist der Anteil dieser maximalen Rechteckfläche an der gesamten Dreiecksfläche (in %)?

8. Berechnen Sie nur mittels elementarer Integrationstechniken:

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sqrt{3x}\cdot\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ (ii) $\displaystyle\int \frac{2x^4-x^3+9x^2-6x-12}{x^3+4x}\,\mathrm{d}x$

Hinweis zu allen Aufgaben: Erläutern Sie stets all Ihre Lösungsschritte so ausführlich, dass Ihre Rechengänge und Argumentationen nachvollziehbar sind – und nun

viel Erfolg!