

## Prüfung in Mathematik 1 WS 08/09

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Hilfsmittel: 2 DIN A4 - Blätter eigene Aufzeichnungen, kein Rechner!

1. (i) Für welche  $a \in \mathbb{R}$  ist die Gleichung  $\sin x + \cos x = a$  in  $\mathbb{R}$  lösbar?
- (ii) Lösen Sie (durch geschickte Substitution):  $(1 + e) \sinh \frac{x}{3} + (1 - e) \cosh \frac{x}{3} = e - 1$

2. Gegeben sei das reelle Polynom  $p(x) = x^5 - 12x^4 + 25x^3 - 50x^2$ .

- (i) Zeigen Sie durch Nachrechnen, dass  $b_1 = 1 + 2j$  eine komplexe Nullstelle von  $p$  ist.
- (ii) Bestimmen Sie alle Nullstellen von  $p$ .
- (iii) Geben Sie die reelle Polynomzerlegung von  $p$  in Linearfaktoren und quadratisch unzerlegbare Terme an.

3. Mit festem  $c \in \mathbb{R}$  sei das folgende (4,3)-LGS gegeben:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -3 \\ & & 4x_2 & - & 2x_3 & = & c \\ 5x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -6 - c \end{array} .$$

- (i) Untersuchen Sie, für welche(s)  $c \in \mathbb{R}$  das gegebene LGS lösbar/unlösbar ist. Für welche(s)  $c$  ist das LGS eindeutig lösbar?
- (ii) Lösen Sie – falls möglich – das LGS für  $\alpha) c = 3$ ,  $\beta) c = 0$ .

4. Bestimmen Sie alle  $x \in \mathbb{R}$ , für die die (4,4)-Matrix  $\begin{pmatrix} x & 4 & 1 & 2 \\ 0 & x & 2 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & x \end{pmatrix}$  keinen maximalen Rang hat.

5. Berechnen Sie – falls existent – die folgenden Grenzwerte:

$$(i) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3k - 1 - 2k \cdot \sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{k^4} + 2\sqrt{k} + 15}$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{1 - \cos x}$$

6. (i) Für welche  $b, c \in \mathbb{R}$  gilt (mit beliebigem  $x \in \mathbb{R}$ ):  $\left((c + bx) \cdot e^{2x}\right)' = x \cdot e^{2x}$  ?

(ii) Für festes  $a \in \mathbb{R}_+$  betrachte man die allgemeine Exponentialfunktion  $f(x) = a^x$ .

(a) Man bestimme die Gleichung der Tangenten an  $f$  in  $x_0 = 0$ .

(b) Für welche(s)  $a \in \mathbb{R}_+$  ist diese waagrecht?

(c) Für welche(s)  $a \in \mathbb{R}_+$  schneidet diese Tangente die  $x$ -Achse in  $(-1, 0)$  ?

Zur Erinnerung: Die Gleichung der Tangenten  $t$ , die den Graph einer Funktion  $f(x)$  in  $x_0$  berührt, lautet allgemein:  $t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ .

7. (i) Zeigen Sie nur unter Benutzung der Definition sowie der Rechenregeln für reelle Funktionen die auch für alle  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gültige Regel:  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ .

(ii) Bekanntlich wird für beliebiges  $z \in \mathbb{C}$  die komplexe Kosinusfunktion definiert durch

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}).$$

Berechnen Sie alle Nullstellen der komplexen Kosinusfunktion und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von  $\mathbb{R}$  bekannten.

8. Berechnen Sie nur mittels elementarer Integrationstechniken:

$$(i) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx$$

$$(ii) \quad \int 3x^2 \cdot e^{-x^3} \, dx$$

**Hinweis zu allen Aufgaben:** Erläutern Sie stets all Ihre Lösungsschritte so ausführlich, dass Ihre Rechengänge und Argumentationen nachvollziehbar sind – und nun

*viel Erfolg!*