Fachhochschule München
Fakultät 04
Prof. Dr. Joachim Erven

München, den 29.1.2010

Prüfung in Mathematik 1   WS 09/10

Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Hilfsmittel: 2 DIN A4 - Blätter eigene Aufzeichnungen, kein Rechner!

1. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $\left|x^2 - 1\right| \leq 2x - 1$?

2. Bestimmen Sie ein reelles Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k$ vom Grade 4, das folgende Bedingungen erfüllt:

a) Der führende Koeffizient a_4 ist 1.
b) 1 und j sind Nullstellen von p.
c) $p'(0) = 0$.

3. Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie die Menge aller Matrizen $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, für die $A \cdot B = B \cdot A$ gilt.

4. Bestimmen Sie auf elementare Weise – also ohne die Regel von BERNOULLI – de l'HOSPITAL! – den Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{4n - 3} \cdot \sqrt{9n + 5} - 6n \right)$.

5. Bilden Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen und stellen Sie die Ergebnisse jeweils möglichst einfach dar (bei (ii) sollen im Ergebnis nur Quadratwurzeln vorkommen)):

(i) $f_1(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (ii) $f_2(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ (für $x > 0$)

6. (i) Lösen Sie die komplexe Gleichung $z^3 = 32 \cdot (1 + j)^2$.
(ii) Lösen Sie die komplexe Gleichung $z \cdot (\bar{z} - 1) = 9 + 3j$
(iii) Bestimmen und skizzieren Sie die Menge M aller komplexen Zahlen q mit $|q - j| < |q + 3|$.

7. Mit festen $a, b \in \mathbb{R}$ sei das folgende homogene (4,4) - LGS gegeben:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x_2 & + & ax_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & bx_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ ax_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & bx_4 & = & 0 \end{array}$$

Es besitzt also stets mindestens die triviale Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

(i) Begründen Sie (ohne zu rechnen!), warum obiges LGS für $a = b = 0$ auch nicht-triviale Lösungen besitzt.

(ii) Es sei nun $a = 1$. Für welche(s) $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, besitzt das LGS auch nicht-triviale Lösungen? Geben Sie für diese(s) b die Lösungsgesamtheit(en) an.

(iii) Geben Sie die Gesamtheit aller Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ an, für die das LGS <u>nur</u> die triviale Lösung besitzt.

8. Achtung: Alle Teile dieser Aufgabe (außer Teil (ii)) sind nur auf $\mathbb{D} = [-\pi, \pi]$ zu betrachten!

(i) Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = \cos x + \sin x$, das heißt im Einzelnen:

- a) Bestimmen Sie die Funktionswerte $f(-\pi)$ und $f(\pi)$.
- b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.
- c) Geben Sie Lage, Art und Funktionswert aller lokalen Extrema von f an.
- d) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(ii) Berechnen Sie $\int (f(x))^2 \, \mathrm{d}x$.

(iii) Bestimmen Sie $x_1 < x_2$ (aus $\mathbb{D}$) mit $f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(iv) Betrachten Sie den Graphen von f, beschränkt auf $[x_1, x_2]$, als Median eines Rotationskörpers (bei Rotation um die x-Achse) und berechnen Sie dessen Volumen.

9. Es sei $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \ln x$. Beide Funktionen sollen auf $\mathbb{R}_+$ betrachtet werden.

(i) Berechnen Sie mittels elementarer Integrationsregeln $\int f_2(x) \mathrm{d}x$.

(ii) Begründen Sie, warum es genau ein $s > 1$ gibt, in dem sich die Graphen beider Funktionen schneiden.

(iii) Es sei F_1 die Fläche zwischen den Graphen der beiden Funktionen von 1 bis s und F_b diejenige von s bis b (mit $b > s$). Skizzieren Sie die Situation und berechen Sie b derart, dass $F_1 = F_b$ ist.

<u>Hinweis</u>: Zur Bestimmung von b muss s nicht berechnet werden!

Viel Erfolg!