FELDER und WELLEN

Master Electrical Engineering

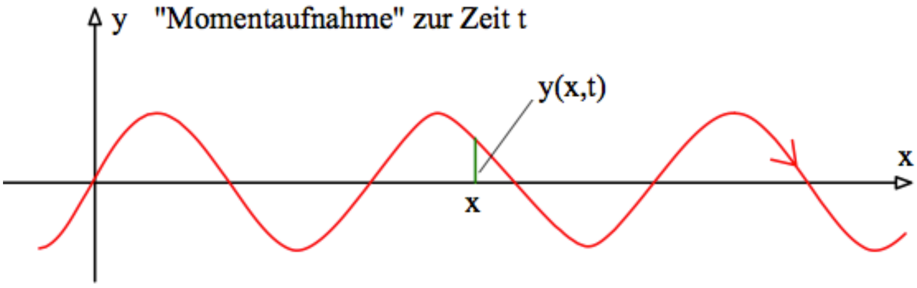
1. DIFFERENTIALGLEICHUNG EINER WELLE

VON

DAMIR RUSITI

Mathematische Beschreibung einer Welle

Zum besseren Verständnis der elektromagnetischen Welle, die man aus den Maxwell-Gleichungen herleiten kann, schauen wir uns zunächst eine sinusförmige Transversalwelle an.



Der Abstand zweier gleichphasig schwingender Teilchen ist die *Wellenlänge* **λ** . Aus der bekannten Formel, dass die Geschwindigkeit der Quotient aus dem Weg und der Zeit ist[1], stellen wir fest, dass sich die Welle mit der *Geschwindigkeit* **c** ausbreitet:

$$c = \frac{\lambda}{T} \text{ oder } c = \lambda f$$

Allgemein definieren wir dann :

$$y(x, t) = y_O \cdot \sin(\omega t - k\lambda)$$

Wir formen um:

das Teilchen am Ort λ muss laut Definition der Wellenlänge mit dem Teilchen am Ort 0 zu jeder Zeit in Phase sein $\Rightarrow y(\lambda,t) = y(0,t) \Rightarrow y_O \cdot \sin(\omega t - k\lambda) = y_O \cdot \sin(\omega t - k \cdot 0) \Rightarrow$ die Winkel müsse sich um 2π unterscheiden $\Rightarrow \omega t - k\lambda = \omega t - 2\pi \Rightarrow$ $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

und erhalten:

$$y(x,t) = y_o \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

[1] Unter der Annahme einer geradlinigen Bewegung ohne Beschleunigung

und bilden dann die **Differentialgleichung** indem wir zwei mal partiell nach x ableiten:

$$y(x,t) = y_o \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \mid \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \left(-\frac{2\pi}{\lambda}\right) \cdot \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \mid \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = -k^2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y \qquad (1)$$

Leitet man die Gleichung y(x,t) zwei mal partiell nach der Zeit ab, erhält man:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y \qquad (2)$$

Wir lösen die Gleichung (2) nach ω auf und setzen die in Gleichung (1) ein unter der Berücksichtigung:

$$\frac{k}{\omega} = \frac{2\pi / \lambda}{2\pi / T} = \frac{T}{\lambda} = \frac{1}{c}$$

und erhalten allgemeine **Differenzialgleichung einer Welle** (Wellen-DGL):

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung können wir die Phasengeschwindigkeit einer Welle bestimmen. Weiterhin stellt man fest, dass die Krümmung der Kurve an der Stelle x direkt proportional zur Beschleunigung an derselben Stelle ist.

Mit der **Wellen-DGL** werden wir auch eine **elektromagnetische Welle** beschreiben.