Tutorium Mathematik 2 (Prof. Kahl) - SS2011

Tim Seyler

Blatt 1 - Kurvenintegrale

Aufgabe 1

Berechnen Sie das Linienintegral $\int\limits_C (y \cdot e^x \mathrm{d}x + e^x \mathrm{d}y)$ längs des parabelförmigen Verbindungsweges $C: x = t,\ y = t^2$ der beiden Punkte $O = (0;0)$ und $P = (1;1)$

Aufgabe 2

Welchen Wert besitzt das Linienintegral des räumlichen Vektorfeldes $\vec{F}(x;y;z) = \begin{pmatrix} 2x + y^2 \\ x^2yz \\ x + z \end{pmatrix}$ längs der Kurve C, die durch den Ortsvektor $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$ beschrieben wird?

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die folgenden Linienintegrale wegunabhängig sind und bestimmen Sie die zugehörige Potentialfunktion.

a) $\int\limits_C [(2xy + 4x)\mathrm{d}x + (x^2 - 1)\mathrm{d}y]$ b) $\int\limits_C (e^y \mathrm{d}x + x \cdot e^y \mathrm{d}y)$ c) $\int\limits_C [(3x^2y + y^3)\mathrm{d}x + (x^3 + 3xy^2)\mathrm{d}y]$

Aufgabe 4

Gegeben ist das Kraftfeld $\vec{F} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$.

a) Zeigen Sie, dass das Feld konservativ ist.
b) Bestimmen Sie das Potential $\phi(x;y)$ des Feldes.
c) Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int\limits_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ für einen beliebigen Weg C von $P_1 = (1;0)$ nach $P_2 = (3;5)$.

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Linienintegral $\int\limits_C (xy^2 \mathrm{d}x - x^2yz\mathrm{d}y + xz^2\mathrm{d}z)$ längs des Weges C mit dem Ortsvektor $\vec{r}(t) = t \cdot \vec{e}_x + t^2 \cdot \vec{e}_y + t^3 \cdot \vec{e}_z \quad (1 \leq t \leq 2)$.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Krümmung der Kurve $k(t) = (t, 1 - \cos t), t \in [0,1]$.

Aufgabe 7

Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden Kurven.

a) $(x(t), y(t)) = (t, 2(\cosh\left(\frac{x}{2}\right) - 1))$, mit $|x| \leq 5$
b) $(x(t), y(t)) = (ln\sqrt{1+t^2}, \arctan t)$, mit $0 \leq t \leq 2$