Tutorium Mathematik 2 (Prof. Kahl) - SS2011

Tim Seyler

Integrationsreihenfolge bei Mehrfachintegralen

Bei einem Mehrfachintegral mit AUSSCHLIEẞLICH KONSTANTEN Grenzen ist die Integrationsreihenfolge frei wählbar. Es gilt u.A.:

$$V = \int_1^2 \int_3^4 \int_5^6 xyz^2 \, \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \quad \Longleftrightarrow \quad V = \int_5^6 \int_3^4 \int_1^2 xyz^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \Longleftrightarrow \quad V = \int_3^4 \int_1^2 \int_5^6 xyz^2 \, \mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Sobald aber die Integrationsgrenzen Variablen aufweisen, nach welchen integriert werden muss, können wir die Reihenfolge nicht mehr einfach so vertauschen. Wenn wir uns im Dreidimensionalen Raum befinden, sind die Grenzen (ich nenne sie hier *Anteile*) wie folgt aufgebaut:

x-*Anteil* $= a$ (Bsp: $\int_1^2 \mathrm{d}x$)

y-*Anteil* $= f(x)$ (Bsp: $\int_{x+1}^{x^2} \mathrm{d}y$)

z-*Anteil* $= z(x,y)$ (Bsp: $\int_{4x}^{x-y^2} \mathrm{d}z$)

Wenn die Grenzen wie soeben erwähnt aufgebaut sind, ist ein einfaches Vertauschen nicht mehr möglich und führt zu einem *falschen* Ergebnis. In diesem Fall müssen wir wie folgt integrieren:

$$\boxed{V = \int\int\int f(x;y;z)\mathrm{d}V = \int_a^b \int_{f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x}$$

In Worten: Wir integrieren (wie immer!) von Innen nach Außen, beginnend mit der Variable mit den MEISTEN Veränderlichen (*hier*: z) hin zu der Variable mit den WENIGSTEN (gar keinen) Veränderlichen (*hier*: x). Aufgabe 1 auf Blatt 5 zeigt, dass die Reihenfolge auch manchmal auf Grund der Aufgabenstellung geändert werden muss, ohne die Grenzen erneut auszurechnen.
Wenn wir ansonsten die Integrationsreihenfolge verändern möchten (aus welchem Grund auch immer!), müssen die Integrationsgrenzen NEU BESTIMMT werden.

Die Erläuterung bezieht sich auf kartesische Koordinaten. Ähnliche Regeln gelten z.B. für Zylinderkoordinaten, auf welche ich hier nicht weiter eingehen werde.

Beispiel für das Ändern der Integrationsreihenfolge

Aufgabe: Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge des folgenden Doppelintegrals:

$$\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{1}^{3-2x} f(x;y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Der Aufbau dieser *normalen* Integration sollte klar sein.
Nach dem Tauschen der Integrationsreihenfolge, soll laut Aufgabenstellung das Doppelintegral folgende Form haben:

$$\int\int f(x;y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Als erstes müssen wir schauen, welche y-Achsen-Abschnitte bzgl der zu integrierenden Fläche relevant sind. Sofern dies ersichtlich ist, wäre die einfachste Möglichkeit, diese vom Koordinatensystem abzulesen. Da dies aber nicht immer so einfach möglich ist, werde ich das *mathematische* Verfahren benutzen.

Logischweise befinden sich diese Punkt auf der y-Achse, sprich bei $x = 0$. Wie setzen also in den Funktionen (hier $y_1 = 3 - 2x$ und $y_2 = 1$) $x = 0$ und lösen danach nach y auf. Dadurch erhalten wir unsere Integrationsgrenzen für y.

$$y_1(x=0) = 3 \qquad y_2(x=0) = 1 \quad \Longrightarrow \int\limits_{1}^{3}\mathrm{d}y$$

Um die Integrationsgrenzen von y rauszubekommen, müssen wir die Funktionen y_1 und y_2 lediglich nach x auflösen.

$$y_1 = 3 - 2x \rightarrow x_1 = \frac{3-y}{2} \qquad y_2 = 1 \rightarrow x_2 = 0 \qquad \Longrightarrow \int\limits_{0}^{\frac{3-y}{2}}\mathrm{d}x$$

Nach Vertauschen Integrationsreihenfolge lautet das Doppelintegral nun

$$\int\limits_{1}^{3}\int\limits_{0}^{\frac{3-y}{2}} f(x;y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Wie wir sehen, ändert sich der Integrand $f(x;y)$ durch die Änderung der Integrationsreihenfolge nicht und kann somit unbeachtet bleiben.