# Lösungen der Übungsaufgaben vom 30.April 2008

**Aufgabe I.** (siehe Übungsaufgabe 4 vom 23.April 2008)

Ermitteln Sie die Summen folgender Reihen:

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} = -\frac{2}{3}$$

c) $$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^{2n-2} \cdot 5^{-n+1}}{2^{n-2}} = \frac{5 \cdot 2^2}{3^2} \cdot \left(\frac{9}{2 \cdot 5}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{9}{2 \cdot 5})^n = \frac{9^2}{2 \cdot 5^2} \cdot 10 = \frac{81}{5}$$

**Aufgabe II.** (siehe Übungsaufgabe 5 vom 23.April 2008)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. (Hinweis: Bei der Grenzwertbestimmung einiger Reihen ist eine Partialbruchzerlegung sinnvoll.)

a) $$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{-5}{n^2 - n - 6} = -\frac{137}{60}$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 2n} = \frac{3}{2}$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot x^{3n} = \frac{1}{1 - 2x^3}$$

$$für\ |x| < \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2 + 5n + 4} = \frac{13}{12}$$

**Aufgabe III.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \cdots + \frac{1}{(2n)!} + \frac{1}{(2n+2)!} + \cdots$$

konvergiert mit

$$a_n = \frac{1}{(2n)!} \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n+2)!}}{\frac{1}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(2n)!\,(2N+1)(2n+2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)!} = 0$$

**Aufgabe IV.**

a) konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5} < 1$$

b) konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10^n + 1}{10^{n+1} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 10^{-n}}{10 + 10^{-n}} = \frac{1}{10} < 1$$

c) konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

d) divergiert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} n}{(n+1)2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 0$$

e) konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n+2}(2n)!}{(2n+2)!\,3^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1$$

**Aufgabe V.**

Welche der folgenden alternierenden Reihen konvergieren, welche divergieren?

a) konvergiert, da

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \cdots$$ und $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

b) konvergiert, da

$$\frac{1}{5} > \frac{1}{2\cdot 5^3} > \frac{1}{3\cdot 5^5} > \cdots$$ und $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\cdot 5^{2n-1}} = 0$$