Tutorium Mathematik 2 (Prof. Kahl) - SS2011

Tim Seyler

Ergänzung zu Differentialgleichungen - Variation der Konstanten

Eine inhomogene, lineare Differentialgleichungen vom Grad 1

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

lässt sich durch Variation der Konstanten wie folgt lösen:

Im 1. Schritt wird die entsprechende homogene Differentialgleichung

$$y_0' + f(x) \cdot y_0 = 0$$

durch Trennung der Variablen gelöst. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung hat bekanntlicherweise die Form:

$y_0 = C \cdot e^{-\int f(x)\mathrm{d}x} = C \cdot e^{-F(x)}, \quad mit \quad F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x \quad (C \in \mathbb{R})$

Um nun die inhomogene Differentialgleichung zu lösen, wird die Integrationskonstante C durch eine unbekannte Funktion $C(x)$ ersetzt:

$$C \to C(x), \quad y_0 \to y = C(x) \cdot e^{-F(x)}$$

$$y' = C'(x) \cdot e^{-F(x)} - C(x) \cdot f(x) \cdot e^{-F(x)}$$

Nun müssen wir noch die Funktionsterme für y und y' in die inhomogene Differentialgleichung einsetzen:

$$C'(x) \cdot e^{-F(x)} = g(x)$$

$$C'(x) = g(x) \cdot e^{F(x)} \quad \Longrightarrow \quad C(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)}\mathrm{d}x + C_1$$

Diesen Ausdruck für $C(x)$ setzen wir in die Formel für y ein und erhalten die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$y = C(x) \cdot e^{-F(x)} = (\int g(x) \cdot e^{F(x)}\mathrm{d}x + C_1) \cdot e^{-F(x)} = (\int g(x) \cdot e^{\int f(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_1) \cdot e^{-\int f(x)\mathrm{d}x}$

Wie kommt es eigentlich zu dem Namen "Variation der Konstanten"? - Nun ja, wie wir gesehen haben, variiert die Integrationskonstante C , d.h. sie wird durch eine Funktion $C(x)$ ersetzt. Daher der Name :-)