Lösungen der Übungsaufgaben vom 14.Mai 2008

Aufgabe I. (siehe Übungsaufgabe 4 vom 30.April 2008)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren.

a) konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5} < 1$$

b) konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10^n + 1}{10^{n+1} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 10^{-n}}{10 + 10^{-n}} = \frac{1}{10} < 1$$

c) konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

d) divergiert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} n}{(n+1)2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 0$$

e) konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n+2}(2n)!}{(2n+2)!\,3^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1$$

Aufgabe II. (siehe Übungsaufgabe 5 vom 30.April 2008)

Welche der folgenden alternierenden Reihen konvergieren, welche divergieren?

a) konvergiert, da

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \cdots$$ und $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

b) konvergiert, da

$$\frac{1}{5} > \frac{1}{2\cdot 5^3} > \frac{1}{3\cdot 5^5} > \cdots$$ und $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\cdot 5^{2n-1}} = 0$$

Aufgabe III.

Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

a) $r = 0$ b) $r = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ c) $r = \frac{e}{2}$ d) $r = e$

Aufgabe IV.

$$f(x) = \frac{x}{\sin(x)} \approx 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + \cdots$$

Aufgabe V.

Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$ haben alle drei Reihen den Konvergenzradius 1. Bleiben die Randpunkte zu untersuchen

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$	divergiert
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$	Konvergieren
$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	konvergiert für $-1 < x < 1$, also in keinem Randpunkt
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	konvergiert für $-1 \le x < 1$, also in einem Randpunkt
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$	konvergiert für $-1 \le x \le 1$, also in beiden Randpunkten

Aufgabe VI.

Berechnen Sie die Fourierreihe von

a) $$f(x) = \sin(x) \cdot \cos^2(\frac{x}{2}) \; = \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{4}\sin(2x)$$

b) $$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2} \; für -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} - x \; für \; \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \end{cases} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}(\sin x - \frac{1}{9}\sin 3x + \frac{1}{25}\sin 5x \; \pm \cdots$$
$$2\pi \; periodisch$$