Tutorium Mathematik 2 (Prof. Kahl) - SS2011

Tim Seyler

Ergänzung Konvergenzradius - Berechnung und Interpretation V.1.3

Beispiel 1

Betrachten wir die folgende Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{3^3} + ...$$

In diesem Fall bleibt für die Berechnung des Konvergenzradius das x^n unbeachtet, sprich wir ersetzen es einfach durch 1 .

Nun wenden wir die bekannte Formel zur Berechnung des Konvergenzradius an (unser x^n ist hier nicht vorhanden!):

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+1}}{3^n} \right| = 3$$

Da unser Konvergenzradius einen festen Wert (hier 3) beträgt, bewegen wir uns im Bereich $x = -3$ und $x = 3$. Nun untersuchen wir das Konvergenzverhalten der Potenzreihe in genau diesen Randpunkten. Dazu setzen wir die Randpunkte in die Potenzreihe ein und betrachten das Verhalten.

<u>Für $x = 3$:</u> $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \quad \rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n$

Die Reihe divergiert im Punkt $x = 3$, da die Reihe $\rightarrow \infty$ geht.

<u>Für $x = -3$:</u> $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \quad \rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$

Die Reihe divergiert im Punkt $x = -3$.

Daraus lässt sich erkennen, dass der Konvergenzbereich der Reihe $x \in (-3, 3)$ ist.

Beispiel 2

Betrachten wir die folgende Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

Auch in diesem Fall bleibt für die Berechnung des Konvergenzradius das x^n unbeachtet, sprich wir ersetzen es erneut einfach durch 1 .

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \infty$$

Da die Reihe keinen festen Konvergenzradius besitzt, entfällt die Betrachtung im Bereich der Randpunkt, da diese nicht vorhanden sind. An dem Konvergenzradius lässt sich leicht erkennen, dass die Reihe überall konvergiert.

Beispiel 3

Betrachten wir die folgende Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2(x+2)^2} + \frac{1}{3(x+2)^3} + ...$$

Da diese Potenzreihe eine "andere" Form als das standardmäßige x^n hat, greifen wir auf die Konvergenzbedingung (Herleitung siehe Papula Band 1, S.554ff)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| < 1$$

zurück, mit $\quad b_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)(x+2)^{n+1}} \;, \quad b_n = \dfrac{1}{n(x+2)^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n(x+2)^n}{(n+1)(x+2)^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{(n+1)(x+2)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)|x+2|} = \frac{1}{|x+2|}$$

Auf Grund des Betrages, müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

$$\frac{1}{|x+2|} < 1 \Longrightarrow |x+2| > 1 \begin{cases} x+2 < -1 \to x < -3 \\ x+2 > 1 \to x > -1 \end{cases}$$

Damit haben wir unsere Randpunkte $x = -3$ und $x = -1$ ausgerechnet, welche wir jetzt für weiteres Vorgehen in die Potenzreihe einsetzen.

<u>Für $x = -3$</u> $\quad \to \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Diese alternierende, harmonische Reihe konvergiert. Der Randpunkt $x = -3$ gehört zum Konvergenzbereich der Reihe.

<u>Für $x = -1$</u> $\quad \to \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Die harmonische Reihe divergiert. Der Randpunkt $x = -1$ gehört nicht zum Konvergenzbereich der Reihe.

Der Konvergenzbereich der Reihe ist $x \in (-\infty, -3] \vee (-1, +\infty)$.

Welche Klammern bei Intervallen?

$\to$ Sofern die Reihe im Randpunkt x konvergiert, verwendet man eckige Klammern.

$\to$ Sofern eine Reihe im Randpunkt x divergiert, verwendet man runde Klammern.

$\to$ Bei"Unendlich" als Intervallgrenze ist ein Intervall nicht abgeschlossen. Man verwendet daher eine eckige Klammer nach außen oder eine runde Klammer, z.b. $[0, \infty)$ oder $[0, \infty[$.