Lösungen der Übungsaufgaben vom 21.Mai 2008

Aufgabe I. (siehe Übungsaufgabe 5 vom 14.Mai 2008)

Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$ haben alle drei Reihen den Konvergenzradius 1. Bleiben die Randpunkte zu untersuchen

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$	divergiert
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$	Konvergieren
$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	konvergiert für $-1 < x < 1$, also in keinem Randpunkt
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	konvergiert für $-1 \leq x < 1$, also in einem Randpunkt
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$	konvergiert für $-1 \leq x \leq 1$, also in beiden Randpunkten

Aufgabe II.

Bestimmen Sie eine Potenzreihe von

a)
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{4x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{n} (x-1)^{-\frac{1}{3}}$$

b)
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{n} (x+1)^{-\frac{1}{3}}$$

c)
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16(x-1)}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{4}}{n} (x-2)^{-\frac{1}{4}}$$

Aufgabe III.

Die Taylor-Reihe lautet:

$$f(x) = \frac{2+x}{1+x-2x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-2)^n) x^n$$

Aufgabe IV.

Berechnen Sie eine Reihendarstellung von:

a) $$f(x) = \frac{4}{4-x} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{2}\right)^n$$

b) $$f(x) = \frac{3}{-x^2+6x-8} = 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (x-3)^{2n}$$

c) $$f(x) = \frac{3}{-x^2-2} = 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (x^2+3)^n$$

Aufgabe V. (siehe Übungsaufgabe 6 vom 14.Mai 2008)

Berechnen Sie die Fourierreihe von

a) $$f(x) = \sin(x) \cdot \cos^2(\frac{x}{2})$$

b) $$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2} \text{ für } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} - x \text{ für } \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$
$$2\pi \textit{ periodisch}$$

c)

d) $$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ für } t_1 = -e \cdot \pi \le t \le t_2 = e \cdot \pi \\ 0 \quad \textit{sonst} \end{cases}$$
$$2\pi \textit{ periodisch und } 0 < e < 1$$

a) $$f(x) = \sin(x) \cdot \cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{4}\sin(2x)$$

b) $$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2} \text{ für } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} - x \text{ für } \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \end{cases} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}(\sin x - \frac{1}{9}\sin 3x + \frac{1}{25}\sin 5x \pm \cdots$$
$$2\pi \textit{ periodisch}$$

c) $$f(t) = e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot e \cdot 2 \cdot \pi)}{n \cdot \pi} \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{1 - \cos(n \cdot e \cdot 2 \cdot \pi)}{n \cdot \pi} \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)$$

d) $$f(t) = e\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{\sin(n \cdot e \cdot \pi)}{n \cdot \pi} \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t)$$