Lösungen der Übungsaufgaben vom 4. Juni 2008

Aufgabe I.

Berechnen Sie den Summenwert der folgenden geometrischen Reihen

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} = \frac{8}{9}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} 0.3^{n-1} = \frac{10}{7}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} 4\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{12}{5}$

Aufgabe II.

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren:

a) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow konvergent$ b) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow konvergent$ c) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1 \Rightarrow konvergent$

Aufgabe III.

Berechnen Sie den Konvergenzradius und den Konvergenzbereich der Potenzreihen:

a)
$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$$
Die Reihe divergiert für $x = -1$ und konvergiert für $x = 1$.
Konvergenzbereich $-1 < x \leq 1$

b)
$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{2^n}\right| = 2$$
Die Reihe divergiert in beiden Randpunkten
Konvergenzbereich $|x| < 2$

c)
$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n+2}\right| = \infty$$
Die Reihe konvergiert beständig, d.h. für jedes $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe IV.

Die Taylor-Reihe von

$$f(x) = \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(x-1)^n$$

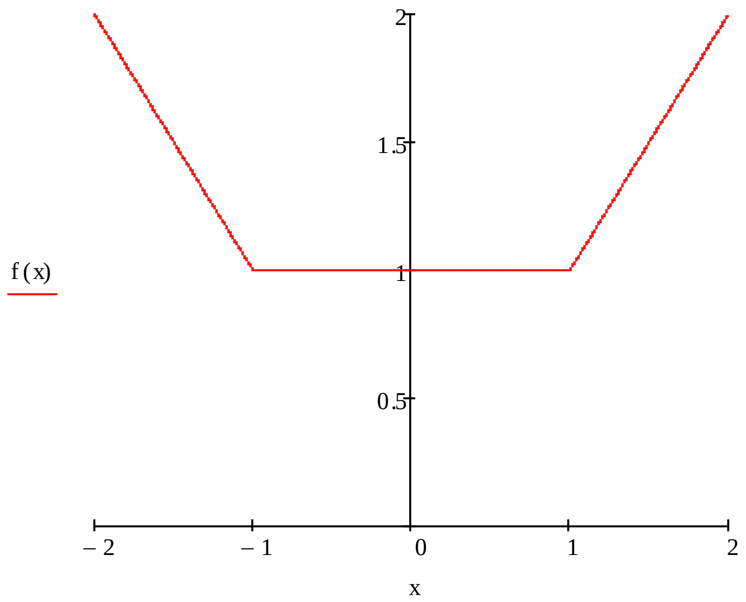
um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Aufgabe V.

$a_0 = \frac{4}{3}\pi^2$ $a_n = -\frac{4}{n^2}$ $b_n = 0\ (gerade\ Funktion)$

$$f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{n^2}\cos(n \cdot x)$$

Aufgabe VI.



b)

$a_0 = 2{,}5 \qquad a_n = \frac{\cos(2n)}{n^2} + \frac{2\sin(2n)}{n} - \frac{\cos(n)}{n^2} \qquad b_n = 0\ (gerade\ Funktion)$

$$f(x) = 2{,}5 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(2n)}{n^2} + \frac{2\sin(2n)}{n} - \frac{\cos(n)}{n^2} \right) \cos(n \cdot x)$$