Tutorium Mathematik 2 (Prof. Kahl) - SS2011

Tim Seyler

Blatt 8 - Differentialgleichungen und Laplace Transformation

Lösungen

Aufgabe 1

a) allgemeine Lösung: $y_{allg,inhom} = \left(\frac{3}{2} \cdot e^{3x} \cdot (\cos(x) - 3\sin(x)) + C\right) \cdot e^{-3x}$

partikuläre Lösung: $y_{part}(x) = \frac{5}{2} \cdot e^{-3x} + \frac{3}{2} \cdot (\cos(x) - 3\sin(x))$

b) allgemeine Lösung: $y_{allg,inhom} = 5 + C \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3}$

partikuläre Lösung: $y_{part} = 5 + 2 \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3}$

Aufgabe 2

b) Diskriminante < 0

Allgemeine Lösung:

$y = e^{-x}(C_1 \cdot \sin(2x) + C_2 \cdot \cos(2x))$

b) Diskriminante $= 0$

Allgemeine Lösung:

$\rightarrow \quad y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{-2x}$

c) Diskriminante > 0

Allgemeine Lösung:

$\rightarrow \quad y = C_1 \cdot e^{(-\sqrt{7}-2)x} + C_2 \cdot e^{(\sqrt{7}-2)x}$

Aufgabe 3

a) Wir formen den Term mit Hilfe des Additionstheorems $\sin(\alpha)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$ um und transformieren $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2\omega)$.

In der Korrespondenztabelle findet man

$1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$

$\cos(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2 + a^2}$

Auf Grund der Linearität der Laplace-Transformation fassen wir zusammen (mit $a = 2\omega$):

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + (2\omega)^2} = \frac{\frac{1}{2}(s^2 + 4\omega^2) - \frac{1}{2}s^2}{s \cdot (s^2 + 4\omega^2)} = \frac{2\omega^2}{s \cdot (s^2 + 4\omega^2)} = F(s)$$

b) In der Korrespondenztabelle findet man

$\cos(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2 + a^2}$

Es folgt die Anwendung des Dämpfungssatzes $e^{-\lambda t} \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s + \lambda)$ und erhält

$e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{(s + \lambda)}{(s + \lambda)^2 + \omega^2}$

c) In der Korrespondenztabelle $\implies$ $\cos(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{s}{s^2+a^2}$ $\sin(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{\omega}{s^2+a^2}$

Durch Ableitung im Bildbereich $-t \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F'(s)$ erhalten wir aus der Transformation des Cosinus:

$$-t \cdot \cos(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{(s^2+\omega^2) - s \cdot 2s}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{\omega^2 - s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

Auf Grund von Linearität können wir zusammenfassen

$$f(t) = \frac{\sin(\omega t)}{\omega^3} - \frac{t \cdot \cos(\omega t)}{w^2} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\omega^3} \cdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{\omega^2 - s^2}{(s^2+\omega^2)^2} = F(s)$$