Übungsaufgaben vom 02. Juli 2008

Aufgabe I.

Zeigen Sie, dass die auf $\mathbb{R}^3$ definierte Funktion

$$f(x,y,z) = (6x \cdot y + 2\cos(z), 2e^{2y}z + 3x^2, e^{2y} - 2\sin(z) \cdot x)$$

Ein Gradientenfeld ist. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f. Berechnen Sie für durch $\gamma(t) = (\pi \cdot t, 0, 2\pi \cdot t)$ definierte Kurve $\gamma: [1,3] \to \mathbb{R}^3$ das Kurvenintegral von f längs γ.

Aufgabe II.

Berechnen Sie das Kurvenintegral über die Funktion $f(x,y,z) = (x, xy, xyz)$ längs des Weges $\gamma: [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\gamma(t) = (1, \sin t, t)$.

Aufgabe III.

Lösen Sie das Anfangswertproblem $y(0) = 2$ und $y'(0) = 3$ der linearen Differentialgleichung:

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = -4\sin(t) + 3(t-2)e^{-2t}$$

Aufgabe IV.

Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung $(2x^3 + 3y) + (3x + y - 1)y' = 0$ exakt ist.
Lösen Sie diese Differentialgleichung mit dem Anfangswert $y(1) = 2$.

Aufgabe V.

Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Aufgabe VI.

Berechnen Sie die Fourierreihe der $2\pi - periodischen$ Funktion:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}t - 2 & \pi \le t < \frac{3}{2}\pi \\ 4 - \frac{2}{\pi}t & \frac{3}{2}\pi \le t < 2\pi \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Aufgabe VII.

Bestimmen Sie eine Potenzreihe von sowie deren Konvergenzradius:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16(x-1)}}$$

$$x_0 = 2$$