Tutorium Tutorium Mathematik 2 (Prof. Kahl) - SS2011

Tim Seyler

Probeklausur 1 - Lösung

Aufgabe 1

Für die Längenberechnung einer Kurve gilt allgemein: $L(\gamma) = \int\limits_a^b \parallel \gamma'(t) \parallel \mathrm{d}t$, wobei $\parallel \gamma(t) \parallel = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ die euklidische Norm des Geschwindigkeitsvektors $\gamma'(t)$ ist.
Das Kurvenintegral berechnet sich nach folgender Formel:

$$\int\limits_\gamma f(\vec{x})\mathrm{d}s = \int\limits_a^b f(\gamma(t)) \parallel \gamma'(t) \parallel \mathrm{d}t$$

Bezogen auf die Aufgabenstellung:

$$\gamma_1'(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \parallel \gamma_1'(t) \parallel = \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} = \sqrt{(2+t^2)^2} = 2 + t^2$$

$$\text{Länge} \quad \rightarrow \quad L(\gamma_1) = \int\limits_1^3 (2+t^2)\mathrm{d}t = 6 + 9 - 2 - \frac{1}{3} = \frac{38}{3}$$

$$\text{Kurvenintegral} \quad \rightarrow \quad \int\limits_{\gamma_1} f(x;y;z)\mathrm{d}s = \int\limits_{\gamma_1} \frac{2y}{x}\mathrm{d}s = \int\limits_1^3 \frac{2t^2}{2t}(2+t^2)\mathrm{d}t = 9 + \frac{81}{4} - 1 - \frac{1}{4} = 28$$

Aufgabe 2

Schritt 1: Variablentrennung $\rightarrow$ $y' = xy^2 \cdot \cos(x) \;\rightarrow\; \frac{dx}{dy} = xy^2 \cdot \cos(x) \;\rightarrow\; \frac{dy}{y^2} = x \cdot \cos(x)\ \mathrm{d}x$

$$\Longrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int x \cdot \cos(x)\ \mathrm{d}x$$

Zur besseren Übersicht betrachten wir die zwei Integrationen getrennt:

Linke Seite: $\int \frac{dy}{y^2} = -y^{-1} + C_1$

Rechte Seite: $\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'}\ \mathrm{d}x = \underbrace{x \cdot \sin(x) + cos(x) + C_2}_{partielle\ Integration}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{y} = -x \cdot \sin(x) - \cos(x) + C_3 \Longrightarrow y = \frac{1}{-x \cdot \sin(x) - \cos(x) + C_3} \text{ (allgemeine Lösung)}$$

Schritt 2: Einsetzen der Anfangsbedingung liefert die Partikulärlösung:

$$y = \frac{1}{-0 \cdot \sin(0) - \cos(0) + C_3} = 2 \Longrightarrow \frac{1}{C_3 - 1} = 2 \Longrightarrow C_3 = \frac{3}{2} \Longrightarrow y_{part} = \frac{1}{-x \cdot \sin(x) - \cos(x) + \frac{3}{2}}$$

Schritt 3: Die Partikulärlösung kontrollieren wir durch Ableiten und Einsetzen in die Diff.gleichung

Auf der linken Seite der Dgl. steht $y'_{part} = \dfrac{x \cdot \cos(x)}{(-x \cdot \sin(x) - \cos(x) + \frac{3}{2})^2}$

Auf der rechten Seite findet sich $xy^2 \cdot \cos(x) = x \cdot \left(\dfrac{1}{-x \cdot \sin(x) - \cos(x) + \frac{3}{2}} \right)^2 \cdot \cos(x)$

Da die Terme auf beiden Seiten des Gleichzeigszeichen identisch sind, bestätigt die Kontrolle die Korrektheit des Ergebnisses.

Aufgabe 3

Um die Integrabilitätsbedingung zu prüfen, bringen wir die Dgl. der Aufgabenstellung in die Form einer exakten Diff.gleichung:

$$y' + \frac{f(x;y)}{g(x;y)} = 0$$

Danach betrachtet man die partiellen Ableitungen. Sofern diese übereinstimmen (Integrabilitätsbedingung erfüllt!), werden die Differentialgleichungen nach dem gewohnten Schema gelöst.

(a.) *Schritt 1:*

Als erstes klammern wir aus und bringen den Term auf die Form einer exakten Diff.gleichung:

$$\frac{1}{4}y'x^4+3y+2x^2yy'+x^3y+3y'x+5y'+2xy^2 = 0 \quad \rightarrow \quad y'\left(\frac{1}{4}x^4 + 2x^2y + 3x + 5\right) + (x^3y + 2xy^2 + 3y) = 0$$

$$\implies \quad y' + \frac{x^3y + 2xy^2 + 3y}{\frac{1}{4}x^4 + 2x^2y + 3x + 5} = 0$$

Zum Prüfen der Integrabilitätsbedingung bilden wir also die beiden partiellen Ableitungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^3y + 2xy^2 + 3y) = x^3 + 4xy + 3 \\ \frac{\partial g(x;y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4}x^4 + 2x^2y + 3x + 5\right) = x^3 + 4xy + 3 \end{aligned}\right\} \text{Integrabilitätsbedingung erfüllt!}$$

Schritt 2:

$$F(x;y) = \int f(x)\mathrm{d}x + \varphi(y) = \int (x^3y + 2xy^2 + 3y)\mathrm{d}x + \varphi(y) = \frac{1}{4}x^4y + x^2y^2 + 3xy + \varphi(y)$$

$$F(x;y) = \int g(y)\mathrm{d}y + \Psi(x) = \int \left(\frac{1}{4}x^4 + 2x^2y + 3x + 5\right)\mathrm{d}y + \Psi(x) = \frac{1}{4}x^4y + x^2y^2 + 3xy + 5y + \Psi(x)$$

Jetzt muss man die beiden Stammfunktionen noch anpassen, sodass beide übereinstimmen:
$\varphi(y) = 5y + C_1$ und $\Psi(x) = C_1$

Lösung in implizierter Form:

$$\implies \quad \frac{1}{4}x^4y + x^2y^2 + 3xy + 5y = C$$

(b.) *Schritt 1:*

Gleichung ist hier schon in der Form einer exakten Diff.gleichung. Partielle Ableitungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(6x \cdot \sin(y) + y \cdot e^{xy} + \tfrac{1}{x}) = 6x \cdot \cos(y) + e^{xy} + xy \cdot e^{xy} \\ \frac{\partial g(x;y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 \cdot \cos(y) + x \cdot e^{xy} + 3y^2) = 6x \cdot \cos(y) + e^{xy} + xy \cdot e^{xy} \end{aligned}\right\} \text{Integrabilitätsbedingung erfüllt!}$$

Schritt 2:

$$F(x;y) = \int f(x)\mathrm{d}x + \varphi(y) = \int (6x \cdot \sin(y) + y \cdot e^{xy} + \tfrac{1}{x})\mathrm{d}x + \varphi(y) = 3x^2 \cdot \sin(y) + e^{xy} + \ln(x) + \varphi(y)$$

$$F(x;y) = \int g(y)\mathrm{d}y + \Psi(x) = \int (3x^2 \cdot \cos(y) + x \cdot e^{xy} + 3y^2)\mathrm{d}y + \Psi(x) = 3x^2 \cdot \sin(y) + e^{xy} + y^3 + \Psi(x)$$

Hier müssen ebenso die beiden Stammfunktionen noch anpasst werden, sodass beide übereinstimmen:
$\varphi(y) = y^3 + C_1$ und $\Psi(x) = \ln(x) + C_1$

Lösung in implizierter Form:

$$\Longrightarrow \quad 3x^2 \cdot \sin(y) + e^{xy} + y^3 + \ln(x) = C$$

(c.) *Schritt 1:*

Gleichung ist auch hier schon in der Form einer exakten Diff.gleichung. Partielle Ableitungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(3xy^4 + x^2y^2) = 12xy^3 + 2x^2y \\ \frac{\partial g(x;y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(yx^3 - 2xy) = 3x^2y - 2y \end{aligned}\right\} \text{Integrabilitätsbedingung NICHT erfüllt!}$$

In diesem Fall ist ist die Integrabilitätsbedingung NICHT erfüllt und es wird aus diesem Grund keine Lösung gefordert.

Aufgabe 4

$$V = \int_{x=-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (2a - x - y)\mathrm{d}y = 2 \int_{x=-a}^{a} (2a-x)\sqrt{a^2-x^2}\ \mathrm{d}x = 2a^3\pi$$

Zur Grafik: Die z-Grenzen sind $z = 2a - x - y$ sowie $z = 0$ (Boden des Zylinders), sprich die $x - y$-Ebene. Das Volumen innerhalb des Zylinders zwischen der Ebene $z = 2a - x - y$ und dem Boden des Zylinders ist das gesuchte Volumen.

Aufgabe 5

Hier ist es wichtig, Überblick zu behalten und sinnvoll zu vereinfachen. Es muss mehrmals, genauer gesagt 4(!) mal, die Regel von L'Hospital angewandt werden. Ebenso ist notwendig zu wissen, wie man eine Funktion mit drei Faktorfunktionen $y = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$ ableitet (Papula FS S.132).

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)^2} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 - \sin(x)^2}{x^2 \cdot \sin(x)^2}\right) \overset{\text{LH}}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x - 2\sin(x)\cos(x)}{2x \cdot \sin(x)^2 + x^2 \cdot 2\sin(x)\cos(x)}\right)$$

$$\overset{\text{LH}}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{2 - 2\cos(x)^2 + 2\sin(x)^2}{2\sin(x)^2 + 2x \cdot 2\sin(x)\cos(x) + 2x \cdot 2\sin(x)\cos(x) + x^2 \cdot (2\cos(x)^2 - 2\sin(x)^2)}\right)$$

Zur besseren Übersicht fassen wir den Ausdruck erstmals zusammen:

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2 \cdot \sin(x)^2}{\sin(x)^2 + 4x \cdot \sin(x)\cos(x) + x^2 \cdot (\cos(x)^2 - \sin(x)^2)}\right)$$

$$\overset{\text{LH}}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{4 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)}{6 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) + 6x \cdot (\cos(x)^2 - \sin(x)^2) - 4x^2 \cdot \sin(x)\cos(x)}\right)$$

Wir kürzen und fassen erneut zusammen:

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)}{(3 - 2x^2) \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) + 3x \cdot (\cos(x)^2 - \sin(x)^2)}\right)$$

$$\overset{\text{LH}}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{4 \cdot \cos(x)^2 - 2}{-16x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) + (6 - 2x^2) \cdot (2\cos(x)^2 - 1)}\right)$$

Nun sehen wir, dass es erst jetzt möglich ist $x = 0$ einzusetzen, ohne das der Nenner 0 wird. Der letzte Schritt lautet also:

$$x = 0 \Longrightarrow \quad \frac{4 - 2}{-0 + 6 \cdot (2 - 1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$