

SIGNALE UND SYSTEME

Bachelor in Electrical Engineering

INTEGRALE**1. Rationale Funktionen**

$$1.1 \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$1.2 \quad \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} \cdot (ax+b)^{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$1.3 \quad \int x \cdot (ax+b)^n dx = \frac{1}{a^2 \cdot (n+2)} \cdot (ax+b)^{n+2} - \frac{b}{a^2 \cdot (n+1)} \cdot (ax+b)^{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$1.4 \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$1.5 \quad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b|$$

$$1.6 \quad \int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln|ax+b|$$

$$1.7 \quad \int \frac{1}{x \cdot (ax+b)} dx = -\frac{1}{b} \cdot \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right|$$

$$1.8 \quad \int \frac{ax+b}{cx+d} dx = \frac{ax}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \ln|cx+d|$$

2. Wurzelfunktionen

$$2.1 \quad \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} = \frac{2}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x}$$

$$2.2 \quad \int x \cdot \sqrt{x} dx = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{x^5} = \frac{2}{5} \cdot x^2 \cdot \sqrt{x}$$

$$2.3 \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \cdot \sqrt{x}$$

$$2.4 \quad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = -\frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$2.5 \quad \int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{3a} \cdot \sqrt{(ax+b)^3}$$

$$2.6 \quad \int x \cdot \sqrt{ax+b} dx = \frac{2 \cdot (3ax-2b)}{15a^2} \cdot \sqrt{(ax+b)^3}$$

$$2.7 \quad \int \sqrt{\frac{ax+b}{x}} dx = 2 \cdot \sqrt{ax+b} + b \cdot \int \frac{1}{x \cdot \sqrt{ax+b}} dx$$

$$2.8 \quad \int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{ax+b}$$

3. Sinusfunktionen

$$3.1 \quad \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$3.2 \quad \int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos ax$$

$$3.3 \quad \int \sin^2 ax \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \cdot \sin 2ax$$

$$3.4 \quad \int \sin^n ax \, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cdot \cos ax}{n \cdot a} + \frac{n-1}{n} \cdot \int \sin^{n-2} ax \, dx \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2; \text{ führt letztlich auf } \a href="#">3.2)$$

$$3.5 \quad \int x \cdot \sin ax \, dx = \sin \frac{ax}{a^2} - x \cdot \frac{\cos ax}{a}$$

$$3.6 \quad \int x^n \cdot \sin ax \, dx = -\frac{x^n}{a} \cdot \cos ax + \frac{n}{a} \cdot \int x^{n-1} \cdot \cos ax \, dx \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1; \text{ siehe } \a href="#">4.6)$$

$$3.7 \quad \int \frac{1}{\sin ax} \, dx = \frac{1}{a} \cdot \ln \left| \tan \frac{ax}{2} \right|$$

$$3.8 \quad \int \frac{1}{\sin^2 ax} \, dx = -\frac{1}{a} \cdot \cot ax = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\tan ax}$$

4. Cosinusfunktionen

$$4.1 \quad \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$4.2 \quad \int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \cdot \sin ax$$

$$4.3 \quad \int \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \cdot \sin 2ax$$

$$4.4 \quad \int \cos^n ax \, dx = \frac{\cos^{n-1} ax \cdot \sin ax}{n \cdot a} + \frac{n-1}{n} \cdot \int \cos^{n-2} ax \, dx \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2; \text{ führt letztlich auf } \a href="#">4.2)$$

$$4.5 \quad \int x \cdot \cos ax \, dx = \frac{\cos ax}{a^2} + x \cdot \frac{\sin ax}{a}$$

$$4.6 \quad \int x^n \cdot \cos ax \, dx = \frac{x^n}{a} \cdot \sin ax - \frac{n}{a} \cdot \int x^{n-1} \cdot \sin ax \, dx \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1; \text{ siehe } \a href="#">3.6)$$

$$4.7 \quad \int \frac{1}{\cos ax} \, dx = \frac{1}{a} \cdot \ln \left| \tan \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$4.8 \quad \int \frac{1}{\cos^2 ax} \, dx = \frac{1}{a} \cdot \tan ax$$

$$4.9 \quad \int \cos^n ax \, dx = \frac{1}{a \cdot (n-1)} \cdot \frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \int \cos^{n-2} ax \, dx \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2; \text{ führt letztlich auf } \a href="#">4.7)$$

5. Sinus - und Cosinusfunktionen

$$5.1 \quad \int \sin ax \cdot \cos ax \, dx = \frac{1}{2a} \cdot \sin^2 ax$$

$$5.2 \quad \int \sin^2 ax \cdot \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a}$$

$$5.3 \quad \int \sin^n ax \cdot \cos ax \, dx = \frac{1}{a \cdot (n+1)} \cdot \sin^{n+1} ax \quad (n \neq -1)$$

$$5.4 \quad \int \sin ax \cdot \cos^n ax \, dx = -\frac{1}{a \cdot (n+1)} \cdot \cos^{n+1} ax \quad (n \neq -1)$$

$$5.5 \quad \int \frac{\sin^n ax}{\cos ax} \, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax}{a \cdot (n-1)} + \int \frac{\sin^{n-2} ax}{\cos ax} \, dx \quad (n \neq 1; \text{führt letztlich zu } \a href="#">4.7 \text{ oder } \a href="#">6.2)$$

$$5.6 \quad \int \frac{\cos^n ax}{\sin ax} \, dx = \frac{\cos^{n-1} ax}{a \cdot (n-1)} + \int \frac{\cos^{n-2} ax}{\sin ax} \, dx \quad (n \neq 1; \text{führt letztlich zu } \a href="#">3.7 \text{ oder } \a href="#">7.2)$$

$$5.7 \quad \int \frac{1}{\sin ax \cdot \cos ax} \, dx = \frac{1}{a} \cdot \ln |\tan ax|$$

$$5.8 \quad \int \frac{1}{\sin ax \pm \cos ax} \, dx = \frac{1}{a \cdot \sqrt{2}} \cdot \ln \left| \tan \left(\frac{ax}{2} \pm \frac{\pi}{8} \right) \right|$$

6. Tangensfunktionen

$$6.1 \quad \int \tan x \, dx = -\ln |\cos x|$$

$$6.2 \quad \int \tan ax \, dx = -\frac{1}{a} \cdot \ln |\cos ax|$$

$$6.3 \quad \int \tan^2 ax \, dx = \frac{\tan ax}{a} - x$$

$$6.4 \quad \int \tan^n ax \, dx = \frac{1}{a \cdot (n-1)} \cdot \tan^{n-1} ax - \int \tan^{n-2} ax \, dx \quad (\text{führt letztlich zu } \a href="#">6.2 \text{ oder } \a href="#">6.3)$$

$$6.5 \quad \int \frac{1}{\tan ax \pm 1} \, dx = \pm \frac{x}{2} + \frac{1}{2a} \cdot \ln |\sin ax \pm \cos ax|$$

$$6.6 \quad \int \frac{\tan ax}{\tan ax \pm 1} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\pm 1}{2a} \cdot \ln |\sin ax \pm \cos ax|$$

7. Zusammenfassung wichtiger Funktionen

$f(x)$	$\int f(x)dx$	
a	ax	
x^r	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$	$r \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$x \neq 0$
e^x	e^x	
a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x$	$a > 0$
$\sin x$	$-\cos x$	
$\sin ax$	$-\frac{1}{a}\cos ax$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\cos ax$	$\frac{1}{a}\sin ax$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
\cosh	$\sinh x$	
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	$x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$	
$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\coth x$	$x \neq 0$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln x + \sqrt{x^2 - 1} $	$x < -1$ oder $x > 1$
$\frac{1}{x^2-1}$	$\frac{1}{2}\ln\left \frac{x-1}{x+1}\right $	$x < -1$ oder $x > 1$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left \frac{x+1}{x-1}\right $	$x < -1$ oder $x > 1$