

Allgemein gelten folgende Gesetze:

Zeitverlauf sinusförmig Zeitverlauf beliebig
 Bauelementgleichungen

$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_R \quad u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I}_L \quad u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\underline{U}_C = j\omega C \cdot \underline{I}_C \quad i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

Reelle Fourier-Reihe: (x=ωt)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

π-Periodisch: Periodisch:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x) dx \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f; \quad t = \frac{\varphi}{\omega}; \quad \varphi = \omega t$$

Amplitude der n-ten Harmonischen:

$$A_n = \frac{2A}{\pi} \cdot \frac{\sin(n\varphi)}{n} \quad \varphi = \pi \cdot \frac{t_i}{T}$$

Betrags- und Nullphasenwinkel:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(nx + \varphi_n)$$

$$B_n = \sin \varphi_n = a_n \quad B_n = \cos \varphi_n = b_n$$

$$B_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \varphi_n = \begin{cases} \arctan \frac{a_n}{b_n} & \text{falls } b_n > 0 \\ \arctan \frac{a_n}{b_n} \pm \pi & b_n < 0 \end{cases}$$

Komplexe Normalform der Fourier-Reihe:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \underline{c}_n e^{jn\omega t} \quad \underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

$$\underline{c}_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad \underline{c}_n^* = \frac{a_n + jb_n}{2} \quad c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$a_n = \underline{c}_n + \underline{c}_n^* \quad b_n = j(\underline{c}_n - \underline{c}_n^*) \quad a_0 = 2c_0$$

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha \quad e^{-j\alpha} = \cos \alpha - j \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \quad \sin \alpha = \frac{1}{2j} (e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})$$

$$A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) = \underline{c}_1 e^{j\omega t} + \underline{c}_{-1} e^{-j\omega t}$$

$$A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) = \underline{c}_2 e^{j2\omega t} + \underline{c}_{-2} e^{-j2\omega t}$$

Symmetrieeigenschaften:

gerade f(x)=f(-x)	Ungerade f(x)=-f(-x)	Halbwellensymmetrie f(x)=-f(x+π)
$b_n = 0$	$a_n = 0$	$a_0 = 0$
$\underline{c}_n = \frac{a_n}{2}$	$\underline{c}_n = -j \frac{b_n}{2}$	$a_n = b_n = 0 \text{ für } n = 2, 4, 5, 6, 8, \dots$
$f_g \cdot f_g = f_g$	$f_u \cdot f_u = f_g$	$\underline{c}_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \text{ (n = 1, 2, 3, 5, 7, \dots)}$
		$f_g \cdot f_u = f_u$

Umrechnung von Fourier-Koeffizienten:

Gegeben → Gesucht ↓	a_0, a_n, b_n	B_0, B_n, φ_n	$\underline{c}_0, \underline{c}_n = \underline{c}_{-n}^*$
$a_0 =$	---	B_0	\underline{c}_0
$a_n =$	---	$B_n \sin \varphi_n$	$2 \operatorname{Re}\{\underline{c}_n\}$
$b_n =$	---	$B_n \cos \varphi_n$	$-2 \operatorname{Im}\{\underline{c}_n\}$
$B_0 =$	a_0	---	\underline{c}_0
$B_n =$	$\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$	---	$2 \underline{c}_n $
$\varphi_n =$	$\arctan(a_n/b_n) *$	---	$\Phi_n + 90^\circ$
$\underline{c}_0 =$	a_0	B_0	---
$\underline{c}_n = \underline{c}_{-n}^* =$	$\frac{a_n - jb_n}{2}$	$\frac{B_n (\sin \varphi_n - j \cos \varphi_n)}{2}$	---
$ \underline{c}_n = \underline{c}_{-n}^* =$	$\frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}$	$\frac{B_n}{2}$	---
$\Phi_n = -\Phi_{-n} =$	$\arctan(-b_n/a_n) **$	$\varphi_n - 90^\circ$	---

*) Achtung: Falls $b_n < 0$, muss φ_n um $\pm 180^\circ$ korrigiert werden!
 **) Achtung: Falls $a_n < 0$, muss Φ_n um $\pm 180^\circ$ korrigiert werden!

Gerade und ungerade Anteile:

$$f_g(x) = 0,5 \cdot [f(x) + f(-x)] \quad f_u(x) = 0,5 \cdot [f(x) - f(-x)]$$

Arithmetischer Mittelwert: (Gleichanteil, DC-Komponente)

$$\overline{u(t)} = \bar{U} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) dt = a_0 = B_0 = \underline{c}_0$$

Effektivwert U_{eff}, U_{rms} :

$$U_{eff} = U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t) dt} = \sqrt{B_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2}$$

$$U_{eff} = U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n) \right)^2 dt} = \sqrt{\bar{U}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2}$$

$$a_0 = B_0 = \bar{U} \quad B_n = \hat{U}_n = \sqrt{2} \cdot U_n \quad B_1 \hat{=} \hat{U}_1 \quad B_2 \hat{=} \hat{U}_2$$

Welligkeit:

$$w = \frac{U_{eff}}{u(t)} = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2}}{u(t)} = \frac{\sqrt{U_{eff}^2 - \bar{U}^2}}{\bar{U}}$$

Klirrfaktor, Klirrdämpfung a_k :
reinersin/cos(k=0); $0 \leq k \leq 1$

$$k = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} U_n^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2}} = \frac{\sqrt{U_{eff}^2 - \bar{U}^2 - U_1^2}}{\sqrt{U_{eff}^2 - \bar{U}^2}}$$

$$a_k = 20 \text{dB} \cdot \lg\left(\frac{1}{k}\right) = -20 \text{dB} \cdot \lg k$$

Aus Nachrichtentechnik:

$$k_i = \frac{U_i}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2}}$$

Wirkleistung P:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt \quad P = \bar{U} \cdot \bar{I} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_{uin}$$

Scheinleistung S:

$$S = U_{eff} \cdot I_{eff} = U \cdot I \quad S = \sqrt{\left(\bar{U}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2\right) \left(\bar{I}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2\right)}$$

Blindleistung Q:

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \sin \varphi_{uin}$$

Verzerrungs-Blindleistung D:

$$D^2 = S^2 - P^2 - Q^2$$

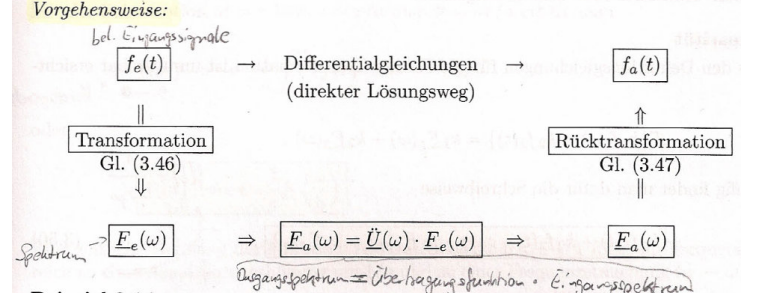
$$D^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} U_n^2 I_m^2 + U_m^2 I_n^2 - 2U_n U_m I_n I_m \cos(\varphi_{uin} - \varphi_{uim}) \quad n > m$$

D verschwidnet, wenn gilt: $\varphi_{uin} = \varphi_{uim}$ & $U_n I_m = U_m I_n$

Analyse linearer Schaltungen:

Zeitbereich	←Fourier-Reihe→	Frequenzbereich
$f_e(t)$		$f_e(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \underline{c}_n e^{jn\omega_1 t}$
Schaltung		Schaltung
		$\underline{c}_{an} = \underline{\hat{U}}(n\omega_1) \cdot \underline{c}_{en}$
Lösung:		Lösung:
$f_a(t)$		$f_a(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \underline{c}_{an} e^{jn\omega_1 t}$

Fourier-Transformation bei der Schaltungsanalyse:



Spektrale Dichte 1/Hz:	Zeitfunktion:
$\underline{F}(T, n\omega_1) = \int_{-T/2}^{T/2} f_p(t) \cdot e^{-jn\omega_1 t} dt$	$f_p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_1}{2\pi} \underline{F}(T, n\omega_1) \cdot e^{jn\omega_1 t}$
$f_p = \sum_{-\infty}^{\infty} \underline{c}_n \cdot e^{jn\omega_1 t}$	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$
Komplexe Spektralfunktion:	Zeitfunktion:
$\underline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$
$\underline{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(f) \cdot e^{-j2\pi f t} df$
$\mathcal{F}\{f(t)\} = \underline{F}(\omega)$	$\mathcal{F}^{-1}\{\underline{F}(\omega)\} = f(t)$

Die Fourier-Transformierte einer Funktion f(t) existiert, wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Eigenschaften der Fourier-Transformation:

Linearität: $k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) \circ \bullet \bullet k_1 \underline{F}_1(\omega) + k_2 \underline{F}_2(\omega)$
 Ähnlichkeitssatz: $f(at) \circ \bullet \bullet \frac{1}{|a|} \underline{F}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
 Differentiation im Zeitbereich: $\frac{df(t)}{dt} \circ \bullet \bullet j\omega \underline{F}(\omega)$
 Verschiebung im Zeit/Frequenzbereich: $f(t + t_0) \circ \bullet \bullet e^{j\omega t_0} \cdot \underline{F}\{f(t)\}$

Parseval'sches Theorem:

$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \cdot f_2^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}_1(\omega) \cdot \underline{F}_2^*(\omega) d\omega$
 speziell für $f_1 = f_2 = f(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{F}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |E(f)|^2 df$

Der Dirac:

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ \infty & \text{für } x = 0 \end{cases}$

Die Sprungfunktion:

$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(t) & \text{für } t < 0 \\ 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(t) & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad \text{sign}(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ +1 & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad \text{sign}(0) = t$

LAPLACE-Transformation L:

$p = \sigma + j\omega$ Voraussetzung für L: $f(t) = 0$ für $t < 0$
 $\underline{F}(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \quad \underline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$
 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\underline{F}(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \underline{F}(p) \cdot e^{pt} dp$

Laplace – Transformierte existiert, wenn: $\int_0^{\infty} |f(t)| \cdot e^{-\sigma t} dt$ endlich ist!

Linearität: $\mathcal{L}\{k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)\} \circ \bullet \bullet k_1 \underline{F}_1(p) + k_2 \underline{F}_2(p)$

Differentiation: $\mathcal{L}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = p^n \underline{F}(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

Ähnlichkeitssatz: $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} \int_0^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-\frac{p\tau}{a}} d\tau = \frac{1}{|a|} \underline{F}\left(\frac{p}{a}\right)$

Verschiebung im Zeitbereich: $\mathcal{L}\{f(t - t_0)\} = e^{-pt_0} \int_0^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-p\tau} d\tau = e^{-pt_0} \underline{F}(p)$

Grenzwertsätze: $f(t = 0+) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot \underline{F}(p) \quad f(t \rightarrow \infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \underline{F}(p)$

Dazu: $\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt$ für die Grenzwerte $p \rightarrow \infty$ & $p \rightarrow 0$ auswerten

Lösung durch Laplace-Transformation der DGL:

Kirchhoff – Gleichung aufstellen: $\sum_{n=1}^m u_n(t) = 0; \sum_{n=1}^k i_n(t) = 0$
 Elemente: $u_R(t) = R \cdot i_R(t); u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}; i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$

Zwischengrößen (Spg. und Ströme) eliminieren \Rightarrow DGL n-ter Ordnung

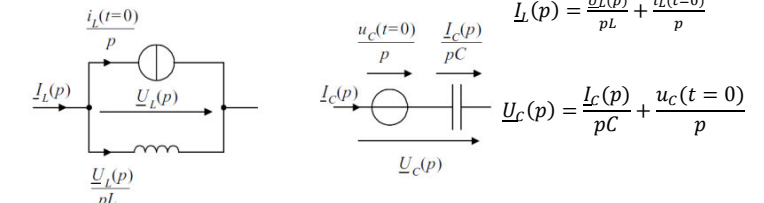
Laplace-Transformation der DGL \Rightarrow algebraische Gleichung
 Berücksichtigung von Anfangsbedingungen im Bildbereich

Algebraische Gleichung nach gesuchter Größe auflösen und Rücktransformation in den Zeitbereich

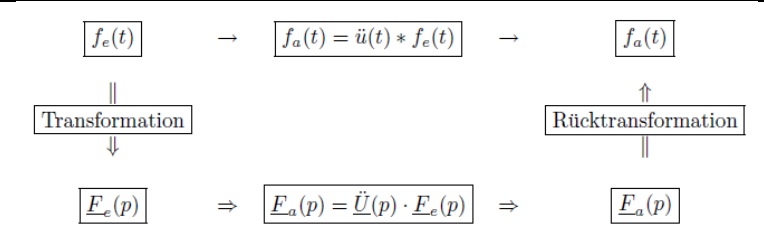
Elementgleichung im Zeit- und Bildbereich

Zeitbereich	Bildbereich
$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$	$\underline{U}_R(p) = R \cdot \underline{I}_R(p)$
$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$	$\underline{U}_L(p) = pL \cdot \underline{I}_L(p) - L \cdot i_L(t=0)$
$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$	$\underline{I}_C(p) = pC \cdot \underline{U}_C(p) - C \cdot u_C(t=0)$
$u_q(t), i_q(t)$	$\underline{U}_q(p), \underline{I}_q(p)$

Ersatzschaltungen im Bildbereich:



Schaltungsanalyse mittels Faltung:



Faltungssatz der Laplacetransformation:
 $f_e(t) * \ddot{u}(t) = \ddot{u}(t) * f_e(t) = \int_{\tau=0}^t f_e(\tau) \cdot \ddot{u}(t-\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^t f_e(t-\tau) \cdot \ddot{u}(\tau) d\tau$
 wenn $f_e(t) = \delta(t) \Rightarrow h(t) = f_a(t) = \ddot{u}(t)$

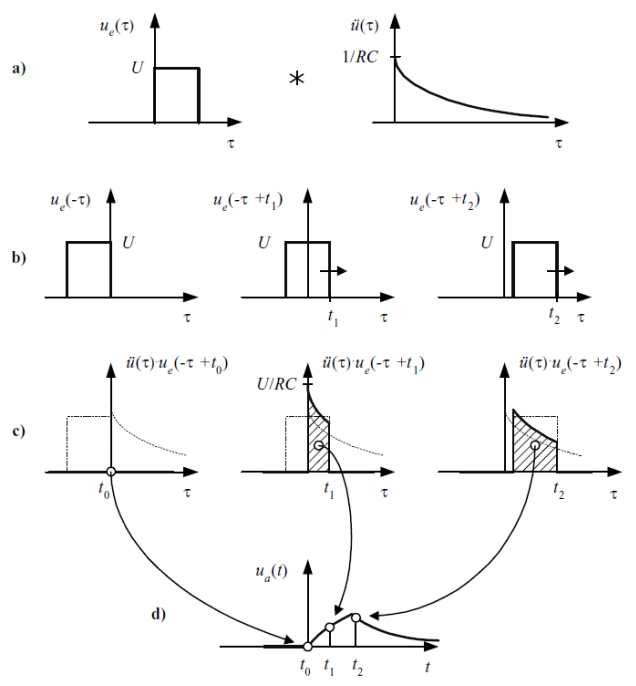


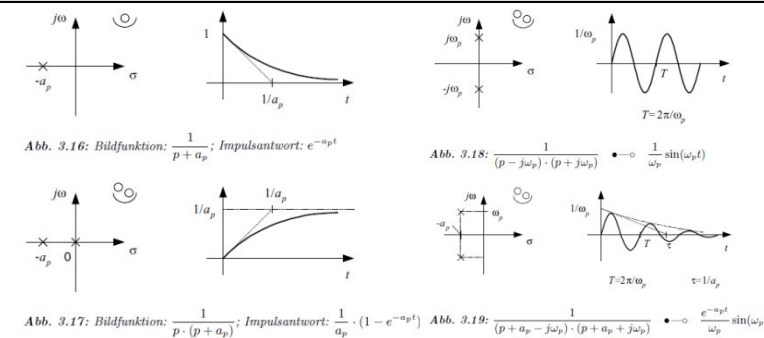
Abb. 3.22: Graphische Darstellung der Faltung

Graphische Auswertung des Faltungsintegrals:
 - t bei $u_e(t)$ und $\ddot{u}(t)$ durch Integrationsvariable τ ersetzen
 - eine der beiden Funktionen falten (z.B. $u_e(\tau) \rightarrow u_e(-\tau)$)
 - Verschiebung $u_e(-\tau)$ um t ($t=t_0, t_1, t_2, \dots$ vgl. Abb.3.22) nach rechts $\Rightarrow u_e(t-\tau)$
 - Multiplikation von $\ddot{u}(\tau)$ mit $u_e(t-\tau)$
 - Integration von $\ddot{u}(\tau) u_e(t-\tau)$ über τ von 0 bis t. Die Integration liefert $u_a(t)$, was dem schraffierten Flächeninhalt entspricht.

Rechnerische Auswertung des Faltungsintegrals:

$$u_a(t) = \begin{cases} \int_{\tau=0}^t \frac{U}{RC} \cdot e^{-\frac{\tau}{RC}} d\tau = U \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) & \text{für } t < T_0 \\ \int_{\tau=t-T_0}^t \frac{U}{RC} \cdot e^{-\frac{\tau}{RC}} d\tau = U e^{-\frac{t}{RC}} \left(e^{\frac{T_0}{RC}} - 1\right) & \text{für } t > T_0 \end{cases}$$

Pol- und Nullstellenplan:



Differentialgleichungen:

1.Ordnung: $\ddot{y}(t) + q(t) \cdot \dot{y}(t) = r(t)$ bzw. $y'(x) + q(x) = r(x)$
 $y(t) = y_A \cdot e^{-q(t-t_A)} + \int_{t_A}^t r(\tau) \cdot e^{q(\tau-t)} d\tau$
 2.Ordnung: $\ddot{y}(t) + p \cdot \dot{y}(t) + q \cdot y(t) = r(t)$ bzw. $y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = r(x)$
 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad \lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad D = \frac{p^2}{4} - q$
 $D > 0: y_h(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \quad D = 0: y_h(t) = C_1 \cdot e^{\lambda t} + C_2 \cdot t \cdot e^{\lambda t}$
 $D < 0: \tilde{C}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + \tilde{C}_2 \cdot e^{\lambda_2 t} = e^{-\alpha t} \cdot [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] \quad \lambda_1 = -\alpha + j\omega \quad \lambda_2 = -\alpha - j\omega$

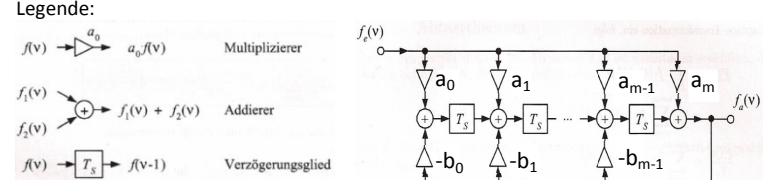
Diskrete Signale und Systeme:

$f_S = \frac{1}{T_S}; \quad \tilde{c}_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n+k_n} = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T f_1(t) \cdot e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} f(v) \cdot e^{-jnv\frac{2\pi}{N}}$

Abtasttheorem:

$c_n = \underline{c}_n^* = 0$ für $n \geq \frac{N}{2}$ ($\Rightarrow \tilde{c}_n = \underline{c}_n$) 2 · f_max < f_S $\frac{N \cdot f_1 = f_S}{T_S = T/N}$
 Messzeit: $T_{Mess} = \frac{N}{f_S}$ spektrale Auflösung: $f_{Mess} = \frac{1}{T_{Mess}} = \frac{1}{NT_S} = \frac{f_S}{N}$
 Aufwand: $\frac{FFT: N \cdot \text{ld}(N)}{DFT: N^2}$
 $T = T_{Mess}$ oder auch $n \cdot T = T_{Mess}$ mit $n = 2, 3, 4, \dots$
 wenn nicht: $f(v) \rightarrow f(v) \cdot \omega(v)$
 Hann: $\omega(v) = 0,5 \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi v}{N}\right)\right]$
 Hamming: $\omega(v) = 0,54 - 0,46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi v}{N}\right)$

z-Transformation:



$$\underline{F}(z) = \sum_{v=0}^{\infty} f(v)z^{-v} \quad \text{für } f(v) \equiv 0 \quad \text{für } v < 0$$

$$z = e^{p \cdot T_s} = e^{j\omega T_s} \Rightarrow j\omega = \frac{1}{T_s} \cdot \ln(z)$$

$f = 0 \Rightarrow z = e^{j\omega f / fs} = e^0 = 1$ $f = \frac{fs}{2} \Rightarrow z = e^{j\pi} = \cos(\pi) + j\sin(\pi) = -1$

Folge der z-Transformation: $\underline{F}(z) = f(0) + f(1) \cdot z^{-1} + f(2) \cdot z^{-2} + \dots$;
 $\underline{F}(z) = \sum_{v=0}^{\infty} f(v) \cdot z^{-v}$

Eigenschaften der z-Transformation:

- Linearität:** $Z\{k_1 f_1(v) + k_2 f_2(v)\} = k_1 \underline{F}_1(z) + k_2 \underline{F}_2(z)$
- Verschiebungssätze:** $Z\{f(v-k)\} = z^{-k} \underline{F}(z)$ $k = 0, 1, 2, 3, \dots$
- Zeitdiskrete Faltung:** $\sum_{k=0}^v f_1(k) \cdot f_2(v-k) = Z^{-1}\{\underline{F}_1(z) \cdot \underline{F}_2(z)\}$
- Anfangs- & Endwertsatz:** $f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \underline{F}(z)$ $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow -1+0} (z-1)\underline{F}(z)$

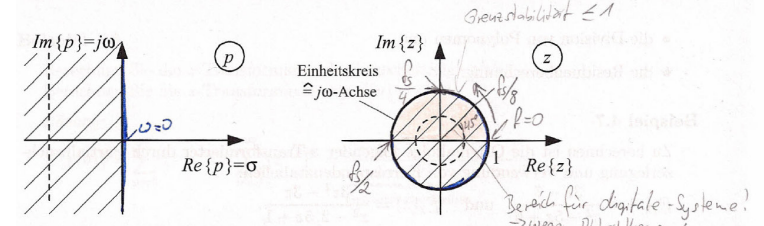
Rücktransformation:

Summenform: $\underline{F}(z) = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0}{1 \cdot z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0} \quad n \geq m$

Produktform: $\underline{F}(z) = C \cdot \frac{(z-z_{01}) \cdot (z-z_{02}) \cdot \dots \cdot (z-z_{0m})}{(z-z_{p1}) \cdot (z-z_{p2}) \cdot \dots \cdot (z-z_{pn})} \quad C = a_m$

Pol- und Nullstellenplan:

- Das System ist **stabil**, wenn alle Polstellen innerhalb des Einheitskreises der z-Ebene zu liegen kommen.
- Befinden sich ein oder mehrere Pole außerhalb des Einheitskreises, ist das System **instabil**, d.h. die Zahlenwerte der Ausgangsfolge steigen unaufhörlich an, bis sie ihren maximalen binären Wert erreicht haben.



- BP:** Nullstellen links und rechts, Mitte keine! | **BS:** Nullstellen in der Mitte!
- TP:** Nullstellen auf der linken Seite! | **HP:** Nullstellen auf der rechten Seite!

Bilineare Transformation:

$$p \Rightarrow \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

Frequenzverzerrung der bilinearen Transformation:

$\omega = 2\pi f$; $p = j\omega = j2\pi f$; $z = e^{pT_s} = e^{j2\pi(\frac{f}{fs})}$; $T_s = \frac{1}{fs}$

\Rightarrow diskrete Systeme mit Tilde (~) versehen. (Kennzeichen für Digitale Schaltungen)

$f = \frac{fs}{\pi} \cdot \tan\left(\frac{\pi f}{fs}\right)$ bzw. $\tilde{f} = \frac{fs}{\pi} \cdot \arctan\left(\frac{\pi f}{fs}\right)$

!!!Bogenmaß!!!

analoges Filter: $f_G = 0,25 \cdot fs$ digitales Filter: $f_G = 0,212 \cdot fs$

FIR-Filter:

FIR-Filter sind nichtrekursive Filter, bei denen die **Rückkopplung entfällt**. $b_k=0$.

Differenzgleichung: $f_a(v) = a_m \cdot f_e(v) + \dots + a_1 \cdot f_e(v+1-m) + a_0 \cdot f_e(v-m)$
 $\underline{F}_a(z) = a_m \cdot \underline{F}_e(z) + \dots + a_1 \cdot \underline{F}_e(z) \cdot z^{-(m-1)} + a_0 \cdot \underline{F}_e(z) \cdot z^{-m}$

Übertragungsfunktion: $\frac{\underline{F}_a(z)}{\underline{F}_e(z)} = a_m + a_{m-1} \cdot z^{-1} + \dots + a_1 \cdot z^{-m+1} + a_0 \cdot z^{-m}$

IIR-Filter:

IIR-Filter sind rekursive Filter **mit Rückkopplung**.

Übertragungsfunktion:

$\frac{\underline{F}_a(z)}{\underline{F}_e(z)} = \frac{a_m + a_{m-1} \cdot z^{-1} + \dots + a_1 \cdot z^{-m+1} + a_0 \cdot z^{-m}}{1 + b_{m-1} \cdot z^{-1} + \dots + b_1 \cdot z^{-m+1} + b_0 \cdot z^{-m}}$ Vorwärtszweig

$\frac{\underline{F}_e(z)}{\underline{F}_a(z)} = \frac{1 + b_{m-1} \cdot z^{-1} + \dots + b_1 \cdot z^{-m+1} + b_0 \cdot z^{-m}}{a_m + a_{m-1} \cdot z^{-1} + \dots + a_1 \cdot z^{-m+1} + a_0 \cdot z^{-m}}$ Rückkopplungszweig

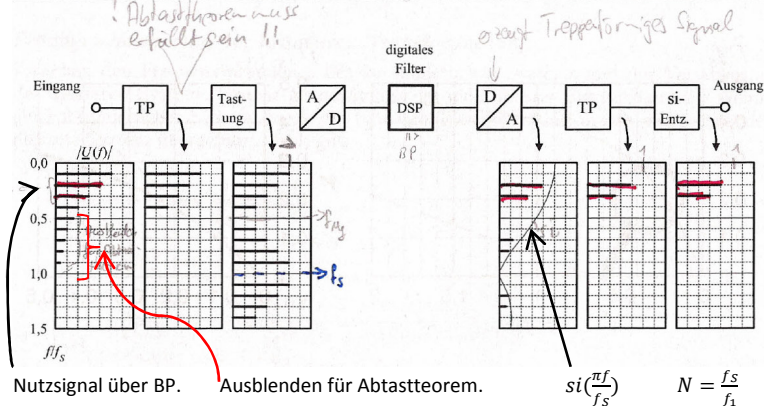
Vergleich von FIR- und IIR-Filtern:

Eigenschaft	FIR-Filter	IIR-Filter
Stabilität	Immer stabil	Bedingt (über Pole im Einheitskreis)
Phase	Linear	Nicht linear
Gruppenlaufzeit	Konstant	Nicht konstant
Erforderliche Ordnung	Hoch	Niedrig
Rechenaufwand	Groß	Klein
Realisierbarkeit	Immer	Nicht immer
Filterfunktion	TP, HP, BP, BS, Multibandfilter, Hilbert-Transformator, Differentiator	TP, HP, BP, BS, Allpass, Integrator

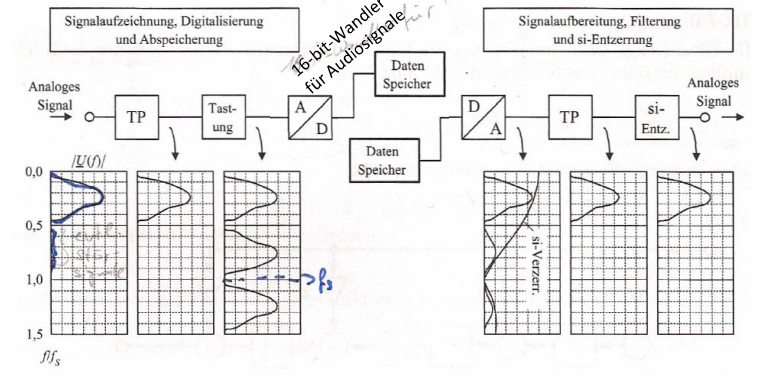
Gruppenlaufzeit: Ableitung der Phase nach der Frequenz
 Allpass: Übertragungsfunktion immer 1 Phasengang anders.

Diskrete Systeme:

- Digitale Signalverarbeitung:



- Digitale Speicherung analoger Signale:



System Kausalität:

- **kausal**, wenn gilt: Zählergrad \leq Nennergrad
- **nicht kausal**: wenn das Signal in der Zukunft liegt ($v+1$)!!
 Oder Zählergrad $>$ Nennergrad

Differenzgleichung:

Bsp. RC-TP:

$i(t) = C \cdot u_a'(t)$
 $-u_e(t) + R \cdot C \cdot u_a'(t) + u_a(t) = 0$
 $-u_e(t) + R \cdot C \cdot u_a'(t) + u_a(t) = 0$
 $u_a(t) + \frac{1}{RC} \cdot u_a(t) = \frac{1}{RC} u_e(t) \quad t = v \cdot T_s$

$u_a[(v+1) \cdot T_s] - u_a(v \cdot T_s) + \frac{1}{RC} u_a(v \cdot T_s) = u_e(v \cdot T_s) \quad | \cdot T_s$
 $u_a[(v+1) \cdot T_s] + \left(\frac{T_s}{RC} - 1\right) u_a(v \cdot T_s) = \frac{T_s}{RC} u_e(v \cdot T_s)$
 $u_a(v \cdot T_s) + \left(\frac{T_s}{RC} - 1\right) u_a[(v-1) \cdot T_s] = \frac{T_s}{RC} u_e[(v-1) \cdot T_s] \quad \text{Differenzgl. von DGL.}$
 $u_a(v \cdot T_s) = \frac{T_s}{RC} u_e[(v-1) \cdot T_s] - \left(\frac{T_s}{RC} - 1\right) u_a[(v-1) \cdot T_s]$
 $u_a(v \cdot T_s) = \frac{T_s}{RC} u_e[(v-1) \cdot T_s] + \left(1 - \frac{T_s}{RC}\right) u_a[(v-1) \cdot T_s]$
 \Rightarrow Signallaufplan (digitales Bild)

$f(v)$	$\underline{F}(z)$	Konvergenzbereich
$\delta(v)$	1	$\delta(v) = \{1; 0; 0; \dots\}$ ganze z-Ebene
$\varepsilon(v)$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
a^v	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a $
a^{v-1} und $f(0) = 0$	$\frac{1}{z-a}$	$ z > a $
v	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
$\cos(\omega T_s v)$	$\frac{z \cdot [z - \cos(\omega T_s)]}{z^2 - 2z \cos(\omega T_s) + 1}$	$ z > 1$
$\sin(\omega T_s v)$	$\frac{z \sin(\omega T_s)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_s) + 1}$	$ z > 1$

Tabelle 4.1: Einige wichtige z-Transformierte

Bezeichnung	$f(t)$	$\underline{F}(\omega)$ bzw. $\underline{F}(f)$
Diracimpuls	$\delta(t)$	1
Konstante 1	1	$2\pi\delta(\omega)$
Vorzeichen-Funktion	$\text{sign}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
Rechteckimpuls	$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t < 1/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\text{si}(\omega/2)$
Sprungfunktion	$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
si-Impuls	$\text{si}(\pi t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$	$\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \text{rect}(f)$
Gauß'scher Impuls	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\omega^2/(4\pi)} = e^{-\pi f^2}$
Einseitiger Exp.-Impuls	$\varepsilon(t) \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{a + j\omega} \quad (a > 0)$
Komplexe Exp.-Funktion	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
Cosinusfunktion	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)$
Sinusfunktion	$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi\delta(\omega + \omega_0) - j\pi\delta(\omega - \omega_0)$
Dirac-Impulsfolge	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T)$

Tabelle 3.2: Wichtige Fourier-Transformierte

$f(t)$	$\underline{F}(p)$	Voraussetzung für Konvergenz der Laplace-Transformierten
$\delta(t)$	1	---
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{p}$	$\text{Re}\{p\} > 0$
e^{-at}	$\frac{1}{a + p}$	$\text{Re}\{p + a\} > 0$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(a + p)}$	$\text{Re}\{p + a\} > 0$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$	$\frac{1}{(a + p)^n}$	$\text{Re}\{p + a\} > 0$
$t^n \quad (n \geq 0 \in \mathbf{N})$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\text{Re}\{p\} > 0$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\text{Re}\{p\} > 0$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\text{Re}\{p\} > 0$
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$	$\text{Re}\{p + a\} > 0$
$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$	$\text{Re}\{p + a\} > 0$

Tabelle 3.3: Wichtige Laplace-Transformierte

<p>1. Rechteckkurve</p> $y(t) = \begin{cases} y & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{für } T/2 < t < T \end{cases}$ $y(t) = \frac{y}{2} + \frac{2y}{\pi} \left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots \right)$	<p>2. Rechteckimpuls</p> <p>Impulsbreite: $b = \frac{T}{2} - 2a$</p> $y(t) = \begin{cases} y & a < t < T - a \\ 0 & \text{im übrigen Intervall} \end{cases}$ $y(t) = \frac{4y}{\pi} \left(\frac{\cos(\omega_0 a)}{1} \cdot \sin(\omega_0 t) + \frac{\cos(3\omega_0 a)}{3} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \frac{\cos(5\omega_0 a)}{5} \cdot \sin(5\omega_0 t) + \dots \right)$
<p>3. Dreieckskurve</p> $y(t) = \begin{cases} -\frac{2y}{T}t + y & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \frac{2y}{T}t - y & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$ $y(t) = \frac{y}{2} + \frac{4y}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\omega_0 t) + \dots \right)$	

