Formelsammlung Numerische Mathematik

Lineare Gleichungen

Normen:

Vektoren

1-Norm, Summennorm: $\boxed{\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$

2-Norm, euklidische Norm: $\boxed{\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}}$

∞ − Norm, Maximumnorm (für Abschätzung): $\boxed{\|x\|_\infty=\max_{j=1,\dots,n}|x_i|}$

Matrizen

1-Norm, Spaltensummennorm: $\boxed{\|A\|_1=\max_{j=1,\dots,n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|}$

2-Norm, euklidische Norm: $\boxed{\|A\|_2=\sqrt{p(A^T\cdot A)}}$

∞ − Norm, Zeilensummennorm: (für Abschätzung) $\boxed{\|A\|_\infty=\max_{i=1,\dots,n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|}$

Empfindlichkeit bzw. Fehlerfortpfl.kennzahl LGS
$\rightarrow cond(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$
cond(A) groß:
→ starke Fehlerauswirkung für $A\cdot x=b$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\le cond(A)\cdot\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}=rel.\ Fehler\ \vec{x}\quad ;b\ analog$$

Inverse Matrix:

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{pmatrix}}$$

Determinante:

$$\boxed{\det A=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}}$$

Nachiteration:

$$\boxed{1.\ \vec{r}=\vec{b}-\underbrace{A\cdot\vec{x}\,'}_{b'}\quad 2.\ A\cdot\Delta\vec{x}=\vec{r}\quad 3.\ x_{verb}=x'+\Delta\vec{x}\quad 4.\ \vec{r}_{verb}=\vec{b}-A\cdot\vec{x}_{verb}\quad mit\ r=Residuum}$$

Multiplikation:

$$\boxed{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{13}\cdot b_{31}&a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+a_{13}\cdot b_{32}&..\\..&..&..\\..&..&..\end{pmatrix}}$$

Transponierte Matrix:

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\rightarrow A^T=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}}$$

L-R-Zerlegung:

$$\boxed{A=L\cdot R}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{c}Z_1\\Z_2\\Z_3\end{array}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{array}{r}\\1/2\cdot(Z_1)\\1/2\cdot(Z_1)\end{array}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&3/2&-1/2\\0&-1/2&3/2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{array}{r}\\\\1/3\cdot(Z_3)\end{array}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&3/2&-1/2\\0&0&4/3\end{pmatrix}=\underline{R}\ ;\ \underline{L}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1/2&1&0\\-1/2&-1/3&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\ \boxed{A\cdot x=b}\qquad\boxed{L\cdot z=b}\qquad\boxed{R\cdot x=b}$$

$$\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\-1/2&1&0\\-1/2&-1/3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1/2\\2/3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&3/2&-1/2\\0&0&4/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1/2\\2/3\end{pmatrix}$$

LGS nach Cramer: $\boxed{x_i=\frac{D_i}{D}}$ D_i = Hilfsdeterminante indem man die i-te Spalte durch die rechte Seite b tauscht

Bsp.: $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&-1&3\\5&2&4\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}2\\-7\\1\end{pmatrix}\quad D=\det A=-2\ ;\ D_1=\begin{vmatrix}2&1&1\\-7&-1&3\\1&2&4\end{vmatrix}=-2\ ;\ D_2=\begin{vmatrix}2&2&1\\1&-7&3\\5&1&4\end{vmatrix}=-4\ ;\ D_3=\begin{vmatrix}2&1&2\\1&-1&-7\\5&2&1\end{vmatrix}=4$

$\boxed{aus\ A\cdot x=B\quad folgt:}$ $\boxed{x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-2}{-2}=1\ ;\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-4}{-4}=2\ ;\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{4}{-2}=-2}$

Iterative Verfahren:(nach Jacobi und Gauß-Seidel)

Konvergenzkriterium: (nur hinreichend)

$\boxed{Zeilensummenkrit.:\ \sum_{\substack{j=1...n\\j\neq i}}|a_{ij}|<|a_{ii}|}$ $\boxed{Spaltensummenkrit.:\ \sum_{\substack{i=1...n\\i\neq j}}|a_{ij}|<|a_{jj}|}$

Falls Zeilensummenkriterium nicht erfüllt → weitere Betrachtung: 1. durch Vertauschung der Gleichungen (Zeilen + rechte Seite) oder 2. Matrix A + rechte Seite b mit der Transponierten A^T multiplizieren $A'=A^T\cdot A\ ;\ b'=A^T\cdot b\rightarrow neues\ Gleichungssystem\ A'\cdot x=b'$

$\boxed{Gesamtschrittverfahren\ nach\ Jacobi:\ x_i^{(k+1)}=\frac{b_i}{a_{ii}}-\sum_{\substack{k=1...n\\k\neq i}}\frac{a_{ik}}{a_{ii}}\cdot x_k^{(k)}}$

$\boxed{Einzelschrittverfahren\ nach\ Gauß-Seidel:\ x_i=\frac{b_i}{a_{ii}}-\sum_{\substack{k=1...n\\k\neq i}}\frac{a_{ik}}{a_{ii}}\cdot x_k}$

2. Weg:
Gesamtschrittverfahren Jacobi: $A\cdot x=b$
Dann heißt die Fixpunktiteration
$Dx^{(n+1)}=-(L+R)x^{(n)}+b$
d.h. $x^{(n+1)}=-D^{-1}(L+R)x^{(n)}+D^{-1}b$

$$A=\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\a_{21}&0&0\\a_{31}&a_{32}&0\end{pmatrix}}_{=L}+\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11}&0&0\\0&a_{22}&0\\0&0&a_{33}\end{pmatrix}}_{=D}+\underbrace{\begin{pmatrix}0&a_{12}&a_{13}\\0&0&a_{23}\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=R}$$

2. Weg:
Einzelschrittverfahren Gauß-Seidel: $A\cdot x=b$
Dann heißt die Fixpunktiteration:
$(D+L)x^{(n+1)}=-Rx^{(n)}+b$
d.h. $x^{(n+1)}=-(D+L)^{-1}Rx^{(n)}+(D+L)^{-1}b$

Nichtlineare Gleichungen

Fixpunktverfahren: Eigenschaft: Nullstelle bei Funktion $\boxed{meistens\ :\ \phi(x)=x}$ $\boxed{Konvergenzkriterium:\ |\phi'(x_K)|_{max}=M<1}$

$\boxed{x_{k+1}=\phi(x_k)}$ *Startwert: Schnittpunkt von Gerade* $y=k$ *mit* $\phi(x)$

Fehler $\boxed{e_{i+1}=e_i^q}$

$z.B: f(x)=2x-\cos(x)\ ;\ f(x)=0\ \rightarrow\ nach\ x\ Auflösen:\ \phi(x)=1/2\cdot\cos(x)$

$x_{k+1}=\phi(x_k)=1/2\cdot\cos(x_k)\ ;\ |\phi'(x_k)|_{max}=M<1$ (im Intervall) $\rightarrow$ *Konvergenz* a-priori-Fehlerabschätzung (nach k Schritten)

$\epsilon \leq \frac{M^k}{1-M} \cdot |x_1 - x_0|$

$k \geq \frac{1}{\ln M} \cdot \ln\left((1-M) \cdot \frac{\epsilon}{|x_1 - x_0|}\right)$

$\epsilon =$ *Fehler*, $k =$ *Anzahl notwendiger Schritte für* ϵ *(k Aufrunden)*

a-posteriori-Fehlerabschätzung(Vorabschätzung)

$\epsilon \leq \frac{M}{1-M} \cdot |x_k - x_{k-1}|$

zur Berechung von k : Maximale Anzahl an benötigten Schritten mit $M = |\phi'(x_K)|_{max}$ *; Wahrscheinliche Anzahl an Schritten mit* $M = |\phi'(x_K)|$ *für* $x_k =$ *Startwert*

$c \geq \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^q}$

q *: Konvergenzordnung*, $q=1$ *: lineare Konvergenz*, $q=2$ *: quadratische Konvergenz*

für lineare Konvergenz gilt: $\left|\frac{d_{k+1}}{d_k}\right| = \frac{|x_{k+2} - x_{k+1}|}{|x_{k+1} - x_k|} \approx const = M_\xi \approx |\phi'(\xi)|$

$M_\xi =$ Konvergenzfaktor

Differenzen $= d_{k+1} = x_{k+1} - x_k$ *Konvergenzfaktoren = Quotienten der Differenzen*

falls Konvergenzfaktoren const. $\rightarrow$ *lineare Konvergenz*
falls Konvergenzfaktoren nicht const. $\rightarrow$ *steiler*

Newton:

Eigenschaften: konvergiert quadratisch; höhere Konvergenzordnung

Globale Fehlerordnung $q=2$ *; Fehler verringert sich quadratisch*

$x_{k+1} = \phi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

Konvergenzkriterium: $|\phi'(x_K)|_{max} = \frac{f(x_k) \cdot f''(x_k)}{(f'(x_k))^2} < 1$

Horner Schema anhand eines Beispiels:

$P_3(x) = 1x^3 + 2x^3 + 3x + 4 \quad ; \quad x_0 = 2$

1.Schritt:

	1	2	3	4
$x_0 = 2$		$2 \cdot 1$	$2 \cdot 4$	$2 \cdot 11$
$\sum$	1	4	11	$[26 = P_3(x_0)]$

$1x_0^2 + 4x_0 + 11 = 23 = Q_2(x_0) = P_3'(x_0)$

2. Schritt:

	1	4	11
$x_0 = 2$		$2 \cdot 1$	$2 \cdot 6$
$\sum$	1	6	$[23 = Q_2(x_0) = P_3'(x_0)]$

$1x_0 + 6 = 8 = R_1(x_0) = Q_2'(x_0)$

3.Schritt:

	1	6
$x_0 = 2$		$2 \cdot 1$
$\sum$	1	$[8 = R_1(x_0) = Q_2'(x_0)]$

für Newton $x_1 = x_0 - \frac{P_3(x_0)}{P_3'(x_0)}$

Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme:

Jacobi Matrix: $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$

Konvergenzkriterium: $Det(J) \neq 0$

Newton – Raphson – Schritt $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - J^{-1} \cdot f(\vec{x}^{(k)})$

für J^{-1} *siehe: Lineare Gleichungen*

z.B mit:

$f(x,y) = (x)^2 + (y)^2 - 25 = 0 \rightarrow$ *Kreis um* $P(0,0)$ *mit Radius* $\sqrt{25}$; $g(x,y) = x^2 - 5x - 4y + 4 = 0 \rightarrow$ *Parabel* $\quad P^{(0)} = (5;1)$

$J|_{P^{(0)}} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow J^{-1} \quad \vec{f}_{(5;1)} = \begin{pmatrix} f(5;1) \\ g(5;1) \end{pmatrix} \quad P^{(1)} = P^{(0)} - J^{-1} \cdot \vec{f}_{(5;1)}$

Interpolation

allgemeines Interpolationspolynom: $P_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x_i^k = y_i$ konkret: $P(x_i) = a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 + a_3 \cdot x_i^4 + \ldots$

$P(x_i) = y -$ *Koordinaten von Punkten mit den entsprechenden* $x -$ *Werten* $\rightarrow$ *mehrere Gleichungen*

Beim Skizzieren der interpolierenden Kurve zuerst gegebene Punkte einzeichnen, dann Punkte interpolierend verbinden

$\rightarrow$ *Bedingungsgleichung lösen nach Gauß / Kramer*

Newton Interpolationspolynom:

konkret: $P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \ldots$

=> $P_n(x_0) = y_0 = c_0 \quad P_n(x_1) = y_1 = c_0 + c_1(x_1 - x_0) \quad P_n(x_2) = y_2 = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$

x_i	f_i	$f(x_i, x_{i+1})$		$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	
x_o	$\overbrace{f(x_0)}^{c_0}$				
		$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \overbrace{f(x_0,x_1)}^{c_1}$			
			$\frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0} = \overbrace{f(x_0,x_1,x_2)}^{c_2}$		
x_1	$f(x_1)$				
		$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f(x_1,x_2)$		$\frac{f(x_1,x_2,x_3)-f(x_0,x_1,x_2)}{x_3-x_0} = \overbrace{f(x_0,x_1,x_2,x_3)}^{c_3}$	
x_2	$f(x_2)$				
			$\frac{f(x_2,x_3)-f(x_1,x_2)}{x_3-x_1} = f(x_1,x_2,x_3)$		
		$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f(x_2,x_3)$			
x_3	$f(x_3)$				

Interpolationsfehler e_{max} :

konstante Interpolation: $e_{max} = 1/2 \cdot h \cdot |f'_{max}|$

lineare Interpolation: $e_{max} = 1/8 \cdot h^2 \cdot |f^{(2)}_{max}|$

hierzu $|f^{(k)}_{max}|$ *abschätzen*

quadratische Interpolation: $e_{max} = \sqrt{3}/27 \cdot h^3 \cdot |f^{(3)}_{max}|$

kubische Interpolation (für mittleres Intervall) $= 3/128 \cdot h^4 \cdot |f^{(4)}_{max}| \Leftrightarrow 1/24 \cdot h^4 \cdot |f^{(4)}_{max}|$ *(für äußere Intervalle)*

kubische Splines:

für $n+1$ *Stützstellen* $\rightarrow 4n$ *Unbekannte*

$S_{i(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

für weitere i anstelle von a, b einsetzten

Bsp.: $x_0 = (-1;1)$; $x_1 = (0;0)$; $x_2 = (1;4) \rightarrow 2$ *Splines* S_0 *und* S_1 ; 8 *Unbekannte*

Bedingungen: $S_0(-1) = 1$; $S_0(0) = 0$; $S_1(0) = 0$; $S_1(1) = 4$; $S_0'(0) = S_1'(0)$; $S_0''(0) = S_1''(0)$; $S_0''(-1) = 0$; $S_1''(1) = 0$

Approximation

durch Taylor-Polynome: $P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$\textit{Restglied}: R_{n(x)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{(n+1)}\textit{mit}\ \xi\ \in\ ]x_0,x[$ (Fehlerfkt.)

$e_{max}=max|f^{(n+1)}(\xi)|\cdot\frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!}\textit{mit}\ \xi\ \in\ ]x_0-h,x_0+h[$

durch Polynome: $P_m=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n$

$m=\textit{Anzahl Stützstellen}; \quad n=\textit{Polynomgrad}$

Bestimmungsgleichung Koeffizienten c

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \ldots & x_2^n\\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \ldots & x_3^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_m & x_m^2 & x_m^3 & \ldots & x_m^n\end{pmatrix}}_{[X]}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}c_0\\ c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}}_{\vec{c}}=\underbrace{\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}}_{\vec{y}}$$

Fehlerquadratsumme F: $(\textit{Bedingung}: F\ \textit{minimal zur Bestimmung der Polynomkoeffizienten})$

$F=\sum_{i=0}^{m}(p_n(x_i)-y_i)^2=\sum_{i=0}^{m}r_i^2\ \textit{mit}\ r=\textit{Abstand approximierte Gerade zu exaktem Punkt}$

$\textit{Bestimmung der Koeffizienten}\ c: \quad 1.\ [X]^T\cdot[X]=[M] \quad 2.\ [X]^T\cdot\vec{y}=\vec{z} \quad 3.\ [M]\cdot\vec{c}=\vec{z}$

nichtlineare Approximation

1. *Überlegung: Wie formt man durch Substitution eine nichtlineare Gleichung zu einer linearen Gleichung um*

$z.B: y=a_0\cdot e^{a_1\cdot x} \rightarrow \ln y=\ln a_0+a_1\cdot x\ \ \textit{mit}\ \ V=\ln y\ ;\ \beta_0=\ln a_0; U=x\ ;\ \beta_1=a_1 \rightarrow V=\beta_0+\beta_1\cdot U$

2. *Umformen der gegebenen Ergebnistabelle mit den oberen Substitutionen* $V=\ln y$ *und* $U=x$

3. 1) $[U]^T\cdot[U]=[M]\leftarrow$ *Bestimmen von* $[M]$ 2) $[U]^T\cdot\vec{V}=\vec{Z}\leftarrow$ *Bestimmen von* $\vec{Z}$ 3) $[M]\cdot\vec{\beta}=\vec{Z}\leftarrow$ *Lösen des LGS nach* $\vec{\beta}$

4. *Rücktransformieren des Ergebnisvekgors* $\beta\rightarrow a$ *mit*: $\beta_0=\ln a_0;\quad \beta_1=a_1$

Numerische Integration

summierte Integrationsformeln:

Fehler: $n\cdot h=b-a$

	global	lokal
$\textit{Rechteck}: \quad Q_R=h(f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_n))$	$E_{Rn}=(b-a)\cdot\frac{1}{2}\cdot h\cdot f'(\xi)$	$E_R=\frac{1}{2}\cdot h^2\cdot f'(\xi)$
$\textit{Trapez}: \quad Q_T=\frac{h}{2}(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+f(x_n))$	$E_{Tn}=-(b-a)\cdot\frac{1}{12}\cdot h^2\cdot f''(\xi)$	$E_T=\frac{-1}{12}\cdot h^3\cdot f''(\xi)$
$\textit{Simpson}: \quad Q_S=\frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n))$	$E_{Sn}=-(b-a)\cdot\frac{1}{180}\cdot h^4\cdot f^{(4)}(\xi)$	$E_S=\frac{-1}{90}\cdot h^5\cdot f^{(4)}(\xi)$
$\textit{Kepler}: \quad Q_{S2}=\frac{1}{3}(4Q_{T2}-Q_{T1})=\frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2))$	$E_{Sn}=-(b-a)\cdot\frac{1}{180}\cdot h^4\cdot f^{(4)}(\xi)$	$E_S=\frac{-1}{90}\cdot h^5\cdot f^{(4)}(\xi)$

Richard – Extrapolation:

$\textit{aus Trapez}: \quad Q_{S2n}=\frac{1}{3}(4Q_{T2n}-Q_{Tn})$

$\textit{aus Simpson}: \quad Q_{B2n}=\frac{1}{15}(16Q_{S2n}-Q_{Sn})$

Fehler global:

$E_{T2n}=\frac{1}{3}(Q_{T2n}-Q_{Tn})$

$E_{B2n}=\frac{1}{15}(Q_{S2n}-Q_{Sn})$

Rombergschema:

h	Q_T	Q_S	Q_B
h	Q_{Tn}	-	-
h/2	Q_{T2n}	Q_{S2n}	-
h/4	Q_{T4n}	Q_{S4n}	Q_{B4n}
h/8	Q_{T8n}	Q_{S8n}	Q_{B8n}

Numerische Differentiation

tatsächlicher Fehler= exakter Wert – numerischer Wert

Taylor Reihe: $D=\frac{df(x)}{dx}|_{x=\ldots}=D_{V/R/Z}+E_{V(V/R/Z)}+E_{D(V/R/Z)}$

$E_D=\textit{Datenfehler/Rundungsfehler}\ ;\ E_V=\textit{Verfahrensfehler}$

Differenzenquotient		Verfahrensfehler	Datenfehler
$D_V(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	[vorwärts]	$E_V(x)=-\frac{h}{2}\cdot f''(\xi)$	$E_{DV}=\frac{\lvert\pm\delta\rvert+\lvert\pm\delta\rvert}{h}$
$D_R(x)=\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$	[rückwärts]	$E_R(x)=\frac{h}{2}\cdot f''(\xi)$	$E_{DR}=\frac{\lvert\pm\delta\rvert+\lvert\pm\delta\rvert}{h}$
$D_Z(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$	[zentral]	$E_Z(x)=-\frac{h^2}{6}\cdot f'''(\xi)$	$E_{DZ}=\frac{\lvert\pm\delta\rvert+\lvert\pm\delta\rvert}{2h}$ entspricht 3-Punkte-Formel

Sonderformen:

5-Punkte-Formel:

$D_{5Pkt}(x)=\frac{1}{12h}[f(x-2h)-8f(x-h)-8f(x-2h)-f(x+2h)]$

Verfahrensfehler: $E_{5Pkt}(x)=-\frac{h^4}{30}\cdot f^{(5)}(\xi)$

Datenfehler: $E_{D5Pkt}=\frac{|\pm\delta|+8\cdot|\pm\delta|+8\cdot|\pm\delta|+|\pm\delta|}{12\cdot h}$

2. Ableitung zu zentralen Differenzenquotienten:

$D_{2Z}(x)=\frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2}$

$E_{2Z}(x)=-\frac{h^2}{12}\cdot f^{(4)}(\xi)$

Richard – Extrapolation

$D_{Rich\left(\frac{h}{2}\right)}=\frac{1}{3}[4D_{Z\left(\frac{h}{2}\right)}-D_{Z(h)}]$

$E_{Rich\left(\frac{h}{2}\right)}=\frac{1}{3}[D_{Z\left(\frac{h}{2}\right)}-D_{Z(h)}]$ $\quad \textit{Fehler}\propto h^4$

$D_{Rich-verbessert}=\frac{1}{15}[16D_{Rich\left(\frac{h}{2}\right)}-D_{Rich\left(\frac{h}{4}\right)}]$ $\quad \textit{Fehler}\propto h^6$

Rombergeschema:

h	D_Z	D_{rich}	$D_{rich\text{-}verbessert}$
h	D_{Zn}	-	-
h/2	D_{Z2n}	$D_{rich\ 2n}$	-
h/4	D_{Z4n}	$D_{rich\ 4n}$	$D_{rich\text{-}verb\ 4n}$

optimales h_{opt}: $|E_G|=|E_D|+|E_Z| \rightarrow \left|\frac{dE_G}{dh}\right|=\left|\frac{dE_D}{dh}\right|+\left|\frac{dE_Z}{dh}\right|=0$ setzen $\rightarrow$ dann nach h_{opt} auflösen (E_Z entspricht E_V)

DGL

Grundform: $\boxed{y' = f(x,y)}$ Steigung am Ort x mit Funktionswert y

Tatsächlicher Fehler $\boxed{e = y_{exakt} - y_{Verfahren}}$

Bestimmung Fehlerordnung $\boxed{\frac{e(h)}{e(h/2)} = \frac{y_{exakt}-y(h)}{y_{exakt}-y(h/2)}}$

$z.B.: 4 \rightarrow 2^2 \rightarrow Fehlerordnung\ q=2$

Euler Verfahren (Fehlerordnung 1 / Doppelte Schrittweite =>doppelter Fehler)

$$\boxed{x_{i+1} = x_i + h \qquad y_{i+i} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)}$$

$1.\ Schritt:\ x_{(1)} = x_{(0)} + h \qquad y_{(1)} = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$ mit Anfangswerten $x_0, y_0, y'_0 = f(x_0, y_0)$

Heun Verfahren (Fehlerordnung 2 / Doppelte Schrittweite => 4-facher Fehler)

$$\boxed{K_1 = h \cdot f(x_0, y_0) \quad ; \quad K_2 = h \cdot f(x_{i+1}, y_i + K_1) \quad ; \quad y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} \cdot (K_1 + K_2)}$$

$$\boxed{y_{i+1}^{(P)} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \quad ; \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(P)})\right)}$$

Runge - Kutta – Verfahren (Fehlerordnung 4 / Doppelte Schrittweite => 16-facher Fehler)

$$\boxed{K_1 = h \cdot f(x_i, y_i) \quad ; \quad K_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2,}, y_i + \frac{K_1}{2}\right) \quad ; \quad K_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}\right)}$$

$$\boxed{K_4 = h \cdot f(x_{i+1}, y_i + K_3) \quad ; \quad K = \frac{1}{6} \cdot (K_1 + 2 \cdot K_2 + 2 \cdot K_3 + K_4) \quad ; \quad y_{i+1} = y_i + K}$$

Richardson Extrapolation

Euler: $\boxed{y_R = 2 \cdot y\left(\frac{h}{2}\right) - y(h) \qquad Fehlerschätzung: \quad e\left(\frac{h}{2}\right) = y\left(\frac{h}{2}\right) - y(h)}$

Heun $\boxed{y_R = \frac{1}{3} \cdot \left[4 \cdot y\left(\frac{h}{2}\right) - y(h)\right] \qquad Fehlerschätzung: \quad e\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left[y\left(\frac{h}{2}\right) - y(h)\right]}$

Runge Kutta $\boxed{y_R = \frac{1}{15} \left[16 \cdot y\left(\frac{h}{2}\right) - y(h)\right] \qquad Fehlerschätzung: \quad e\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{15} \cdot \left[y\left(\frac{h}{2}\right) - y(h)\right]}$

Bemerkung: Für die Richardson Extrapolation sind Ergebnisse für zwei unterschiedliche Schrittweiten von nöten.
Adaptives Verfahren: Anpassung der Schrittweite an den Verlauf der Lösungsfunktion unter verwendung des lokalen Diskretisierungsfehlers. (z.B.: Abschätzung des Fehlers mit Richardson als Schranke für Schrittweitenanpassung)

DGL 2. Ordnung

1. Umstellen nach y''
2. Substituieren mit z=y' ; u=z'=y''
3. Substituiere Anfangsbedingungen
4. Lösen der zwei DGL's 1. Ordnung mit EC/H/RK

z.B: $y' = (4 \cdot x^2 - 2) \cdot y \quad mit \quad z = y' \quad und \quad u = z' = y'' \rightarrow y' = z \quad und \quad z' = (4 \cdot x^2 - 2) \cdot y$

DGL 3. Ordnung

1.Umstellen nach y'''

2. Substituieren mit

$u_0 = y$

$u_1 = y' = u_0$

$u_2 = y'' = u_1' \quad ; \quad y''' = u_2'$

3.Substituiere Anfangsbedingungen

$y(0) = u_0(0)$

$y'(0) = u_1(0)$

$y''(0) = u_2(0)$

4. Lösen der zwei DGL's 1. Ordnung mit EC/H/RK hier nach Heun

$\vec{u}_{i+1}^{(P)} = \vec{u}_i + h \cdot \vec{f}(x_i, \vec{u}_i)$

$\vec{u}_{i+1} = \vec{u}_i + \frac{h}{2} \cdot \left(\vec{f}(x_i, \vec{u}_i) + \vec{f}(x_i, \vec{u}_{i+1}^{(P)})\right)$

z.B: $2y''' - 3y' + 2y = 4\sin(x) \rightarrow y''' = \frac{3}{2}y' - y + 2\sin(x) \rightarrow \begin{pmatrix} u_0' \\ u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \frac{3}{2}u_1 - u_0 + 2\sin(x) \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} u_{0(i+1)}^{(P)} \\ u_{1(i+1)}^{(P)} \\ u_{2(i+1)}^{(P)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{0(i)} \\ u_{1(i)} \\ u_{2(i)} \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} u_{1(i)} \\ u_{2(i)} \\ \frac{3}{2}u_{1(i)} - u_{0(i)} + 2\sin(x_i) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} u_{0(i+1)} \\ u_{1(i+1)} \\ u_{2(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{0(i)} \\ u_{1(i)} \\ u_{2(i)} \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} u_{1(i)} \\ u_{2(i)} \\ \frac{3}{2}u_{1(i)} - u_{0(i)} + 2\sin(x_i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1(i+1)}^{(P)} \\ u_{2(i+1)}^{(P)} \\ \frac{3}{2}u_{1(i+1)}^{(P)} - u_{0(i+1)}^{(P)} + 2\sin(x_{i+1}) \end{pmatrix} \right)$$

Fehler und Rechenaufwand:

Verfahren	Funktionsauswertungen pro Schrit	Rechenaufwand h → h/2	Fehler h → h/2
Euler	1	*2	*1/2
Heun	2	*2	*1/4
Runge-Kutta	4	*2	*1/16

Formelsammlung von: Korbinian Antwerpen, Christoph Raichl, Johannes Sattler, Tomas Zöller