komplexe Zahlen:

Möbius Kreis: $\alpha(x^2+y^2)+\beta x+\gamma y+\delta=0$ } Invers

$\alpha \to \delta,\quad \beta \to \beta,\quad \gamma \to -\gamma,\quad \delta \to \alpha$

Kreisverwandtschaft:

Fall	z-Ebene	ω-Ebene
$\alpha\neq0,\ \delta\neq0$	Kreis nicht d. 0	Kreis n. d. 0
$\alpha\neq0,\ \delta=0$	Kreis durch 0	Gerade nicht 0
$\alpha=0,\ \delta\neq0$	Gerade nicht d. 0	Kreis d. 0
$\alpha=0,\ \delta=0$	Gerade d. 0	Gerade d. 0

Bsp.: 1) $z=e^{jY}$ -> Kreis ; $|z-j|=1$ -> Kreis (0,1) $R=1$

2) $|z|=2$ -> Kreis (0,0) $R=2$

3) $c_1\,Re(z)+c_2\,Im(z)=0$ -> Gerade durch (0,0)

$\frac{1}{z}$ => Gerade durch Ursprung mit $c_1\,Re(z)-c_2\,Im(z)=0$

4) $w^z=e^{z\log w}$

5) $y=x-\frac{1}{2}$ => $y=1+\frac{1}{2}j+t(1+j)=(1+t)+j(\frac{1}{2}+t)$

6) $f(z)=2jz+1 \wedge A=\{z\in\mathbb{C}\,/\,|z-1|=1\}$

i) A -> Kreisgl. $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=1$ => Kreis (1/0), $R=1$

ii) Es sei $w=f(z)$ -> Im? Re? $\quad \underbrace{\frac{1-2y}{u}}_{Re}+\underbrace{j\frac{2x}{v}}_{Im}$

iii) Geben Sie Gleichungen an, die u u. v aus ii) erfüllen, wenn $z=x+jy$ alle Punkte d. Kreises A durchläuft? Welches geom. Objekt?

$x=\frac{v}{2}\qquad y=\frac{1-u}{2}$ => Einsetzen in Kreisgl. i)

$(\frac{v}{2}-1)^2+(\frac{1-u}{2})=1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(v-2)^2+\frac{1}{4}(-u+1)^2=1$

$\Rightarrow (v-2)^2+(u-1)^2=\underbrace{4}_{\hat{=}2^2 \Rightarrow R=2}$ => Kreis (1/2) $R=2$

Reihen:

$\boxed{\text{Nullfolge ? (Nein, => divergent)}}$

- Arithmetische Reihe: $\boxed{a_k=a_0+k\cdot d}$ => hat keinen Grenzwert!
- geom. Reihe: $\boxed{a_k=a\cdot q^k}$ z.B. $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}=1$; $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}=1$; $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{c}=1$
- harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$ => divergent

Bsp.:

$\lim\frac{c^k}{k!}=0$; $\lim(1+\frac{1}{k})^k=e$; q^k -> kvgt. für $|q|<1$

Maj. Krit: $a_k=\frac{\sqrt{(k^2-1)^3}}{\sqrt[4]{(k^4+2k^2+1)^5}}\leq\frac{\sqrt{k^6}}{\sqrt[4]{\dots}}\leq\frac{k^3}{\sqrt[4]{(k^4)^5}}=\frac{1}{k^2}$ => kvgt

Min. Krit: $a_k=\frac{(k+2)^k}{k^{k+0,5}}\geq\frac{k^k}{k^k\cdot k^{0,5}}=\frac{1}{k^{0,5}}$ => div.

Pot. Reihen: Gegen welche Fkt. kvgt. Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{3^{k-1}}{2^{k+1}}x^{k+1}$? Welche x?

$\frac{1}{6}\cdot k(\frac{2}{3})^k x^{k+1}=\frac{x^2}{6}(k(\frac{2}{3})^k x^{k-1})=\frac{x^2}{6}((\frac{2}{3})^k x^k)'=\frac{x^2}{6}(\frac{1}{1-\frac{2}{3}x})'$

$=\frac{x^2}{6}\cdot\frac{-2}{3(1-\frac{2}{3}x)^2}=\frac{-2x^2}{18(1-\frac{2}{3}x)^2}$

- Potenzreihenentw. von $f(x)=\frac{8x^4}{8+x^3}$ um 0

-> geom. Reihe $\frac{x^4}{1+\frac{x^3}{8}}=\frac{x^4}{1-(-(\frac{x}{2})^3)}$ => $x^4\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-\frac{x^3}{8})^k$

-> kvgt. für $|q|<1$ => $\frac{|x^3|}{8}<1$ => $|x^3|<8$ => $|x|<2$

$-2<x<2$

- Wert von $0{,}0\overline{12}$:

$0{,}0\overline{12}=\frac{12}{10^3}+\frac{12}{10^5}+\frac{12}{10^7}=\frac{12}{10^3}(1+\frac{12}{10^2}+\frac{12}{10^4}+\dots)=\frac{12}{10^3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{100})^k$

$=\frac{12}{10^3}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\right)=\frac{12}{10^3}\cdot\frac{1}{\frac{99}{100}}=\frac{12}{990}$

- Wert von $0{,}12\overline{34}=\frac{12}{100}+\frac{34}{10^4}+\frac{34}{10^6}+\dots=\frac{12}{100}+\frac{34}{10^4}(1+\frac{34}{10^2}+\dots)$

$\Rightarrow\frac{12}{100}+\frac{34}{10^4}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{100})^k$ ...

2)

Reihen:

- $\sum^{\infty} a_k = 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{8}{27} + \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \dots$

  ii) Maj. Krit: $|a_k| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$ => kvgt => a_k kvgt

- $\frac{\binom{d}{k+1}}{\binom{d}{k}} = \frac{\binom{d}{k}\left(\frac{d-k}{k+1}\right)}{\binom{d}{k}}$

- Grenzwert: $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{k!} = \sum_{2}^{\infty}\left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right) = \sum_{2}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{2}^{n} \frac{1}{k!} =$

  $= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \sum_{2}^{n-1} \frac{1}{k!} - \sum_{2}^{n-1} \frac{1}{k!} - \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!} \Rightarrow \underline{\underline{1}}$

  $\boxed{\text{(ggf. PBZ anwenden !!!)}}$

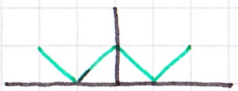
- Bestimmen von Näherungswert, der um weniger als ... vom Grenzwert d. Reihe abweicht?

  => meist ausprobieren schneller z.B. $|s - s_n| < \frac{n+1}{(n+2)(n+3)}$

  $n = 4 \; > 0\dots \; ; \; n = 5 > \dots \; \underbrace{n = 6 < \dots}_{s_6}$

Fourier-Reihen:

1) $f(x) = \begin{cases} 1+x & x \in [-1, 0] \\ 1-x & [0, 1] \\ 2\text{-periodisch} \end{cases}$

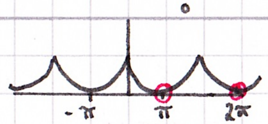


↳ gerade => $b_m = 0$

$a_0 = 2 \cdot \frac{2}{2} \int_0^1 1 - x \, dx$

$a_m = 2 \cdot \frac{2}{2} \int_0^1 (1-x) \cos(n\pi x) \, dx$

2)



-> überall stetig

-> in Vielfachen von π, nicht diffb.

Funktionen mehrerer Veränderlicher:

- Norm: $\|v\| = \|(v_1, v_2, v_3)\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$; $\langle \dots, \dots \rangle$ inneres Produkt (Skalarprodukt)

  $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ (Cauchy Schwarz U.)

  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

  $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$

- Fehlerrechnung: $\Delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial s}\right| \cdot ds + \left|\frac{\partial g}{\partial t}\right| \cdot dt$

  (Betrag für Fehler + u. −)

  z.B. $g = \frac{2 \cdot 8{,}530}{(1{,}35)^2} \frac{m}{s^2} = 9{,}80 \frac{m}{s^2} \Rightarrow g = 9{,}8 \pm \Delta g \frac{m}{s^2}$

- Hesse-Matrix: $H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$

  D > 0 Extremwert

  D < 0 kein Extremwert

  D = 0 keine Aussage

  -> $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ oder/und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ > 0 Min, < 0 Max

- Kettenregel, Gradient, Richtungsableitung:

  $g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{c}(t)) \; c_i'(t)$

  $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right) \quad \vec{p_0} = (1,2)$

Richtungsableitung: $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\vec{p_0}) = \text{grad}_{\vec{p_0}} f \circ \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$

Bsp.:

$f(x,y) = xy + x^2, \quad \vec{p_0} = (1,2) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = y + 2x, \; \frac{\partial f}{\partial y} = x$

$\text{grad}_{\vec{p_0}} f = \text{grad}_{(1,2)} f = (4,1)$

für $\vec{a} = (1,0)$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\vec{p_0}) = (4,1) \circ \frac{(1,0)}{1} = 4$

3)

Fkt. mehrerer Veränderlicher:

Int. Bed: $\underbrace{\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x};\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y};\ \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}}_{\text{notwendig}}$

$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ ohne Def. lücke => hinreichend
einfach zusammenhängend => Int. Bed. erfüllt
$\vec{v}$ hat Potential!

Bsp. $\vec{v}(x,y,z) = (\underbrace{2xyz + 3\sin y}_{v_1(F_x)}, \underbrace{x^2z + 3x\cos y - 5e^{2z}}_{v_2(F_y)}, \underbrace{x^2y - 10ye^{2z}}_{v_3(F_z)})$

(x) $\frac{\partial f}{\partial x} = v_1 \Rightarrow f(x,y,z) = \int 2xyz + 3\sin y\, dx + h(y,z)$
$= x^2yz + 3x\sin y + h(y,z)$ -> nach y ableiten

(y) $\frac{\partial f}{\partial y} = v_2 \Rightarrow x^2z + 3x\cos y - 5e^{2z} = x^2z + 3x\cos y + h'(y,z)$

$-5e^{2z} = h'(y,z) \Rightarrow \int -5e^{2z}\, dy$

darf nur von y (und z) abhängen -> $-5ye^{2z} = h(y,z)$

$\Rightarrow f(x,y,z) = x^2yz + 3x\sin y - 5ye^{2z} + h(z)$

(z) -> nach z ableiten

$\frac{\partial f}{\partial z} = v_3 \Rightarrow x^2y - 10ye^{2z} = x^2y - 10e^{2z} + h'(z)$

$0 = h'(z) \Rightarrow \int 0\, dz$

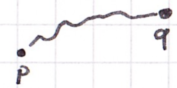
darf nur von z abhängen -> $h(z) = C$

=> Pot. Feld: $x^2yz + 3x\sin y - 5ye^{2z} + C$

1) Int. Bed. 2) $\left(\frac{\partial f}{\partial x} = v_1\right)$ => nach x Integrieren 3) $\left(\frac{\partial f}{\partial y} = v_2\right)$ 2) nach y ableiten 4) gleichsetzen mit v_2 => auflösen 5) Integrieren nach y => $h(y)(z)$ => einsetzen 6) $\left(\frac{\partial f}{\partial z} = v_3\right)$, 5) nach z ableiten 7) gleichsetzen mit v_3 => auflösen 8) Integrieren nach z => $g(z)$, einsetzen => $f(x,y,z)$

Linienintegral:

1) Pot. vorhanden: $\oint_{\vec{c}} \vec{v}\, dr = f(\vec{q}) - f(\vec{p})$



z.B.:
$\vec{c}\,[0,1]$ => Grenzen in $c(t)$ einsetzen: $c(t) = (t, \pi t, \ln(1+t))$

$\Rightarrow c(0,1) = \begin{cases} (0,0,0) \\ (1,\pi,\ln(2)) \end{cases} \Rightarrow f(x,y,z)\Big|_{(0,0,0)}^{(1,\pi,\ln 2)} = f(1,\pi,\ln 2) - f(0,0,0)$

2) kein Pot. vorhanden:

$\int (v_1(t); v_2(t)) \circ (t_x', t_y')\, dt$

z.B. $\vec{c}\,(0,1)$

$\vec{c}(t) = (t, t)$
$\quad t_x \quad t_y$

$\vec{c}(t)' = (1,1)$

3) geschlossener Weg:

$\int_{\vec{c}} \vec{v}\, d\vec{r} = 0$ z.B. Weg $(0,1)$ $\vec{r}(0) = \vec{r}(1)$

-> Werte auf versch. Wegen sind gleich, wenn pot. ex.! Sonst verschieden

Differentialgleichungen

1) gewöhnliche:

i) TDV -> z.B. $y' = x^2(y^2+1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2(y^2+1)$
$\Rightarrow \frac{dy}{y^2+1} = x^2 dx \Rightarrow \int dy = \int dx$

ii) Substitution $\boxed{\frac{y}{x} = u}$:

z.B. $y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = u - \frac{1}{u}$

$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$;
$u'x + u = u - \frac{1}{u}$
$\Rightarrow u' = -\frac{1}{ux}$ (neue DGL -> TDV)
$\Rightarrow \frac{dx}{x} = -u\,du \Rightarrow \ln|x| + \ln|\tilde{C}| = -\frac{u^2}{2}$
$\Rightarrow \ln|\tilde{C}x| = -\frac{u^2}{2} \Rightarrow u = \sqrt{-2\ln|\tilde{C}x|}$
$\Rightarrow y = x \cdot u = x \cdot \sqrt{-2\ln|\tilde{C}x|}$

iii) Subst. $\boxed{ax + by + C = u}$

z.B. $y' = (x+y)^2 = u^2 = \frac{u'-1}{1}$
$u' = u^2 + 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{u^2+1}$
$C + x = \arctan(u) \Rightarrow x = \arctan(x+y)$
$\Rightarrow y = \tan(x+c) - x$

|| C nicht vergessen! ||

4)

iv) Variation d. Konstanten

bei $y' + f(x)\,y = g(x)$

$\Rightarrow \boxed{y = C(x) \cdot e^{-\int f(x)\,dx}}$

falls $g(x) = 0$:

$y = C \cdot e^{-\int f(x)\,dx}$

Bsp: $xy' + 3y = 4x$

$\Rightarrow y' + y \cdot \frac{3}{x} = 4$

I. homogene DGL:

$y' + y\frac{3}{x} = 0 \Rightarrow y = C(x) \cdot e^{-\int \frac{3}{x}dx}$

$= C(x) \cdot \frac{1}{x^3}$

II. Inhomog. DGL VDK:

$y = C(x) \cdot \frac{1}{x^3}$; $y' = C'(x)\frac{1}{x^3} + C(x) \cdot \left(-3\frac{1}{x^4}\right)$

-> einsetzen in $y' + y \cdot \frac{3}{x} = 4$

$\Rightarrow C'(x)\,\frac{1}{x^3} = 4 \Rightarrow C(x) = x^4 + C$

$\Rightarrow$ in I. $y = x + \frac{C}{x^3}$

x = nicht def.

α °	$\frown$	sin	cos	tan
30	$\pi/6$	0,5	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60	$2\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	0,5	$\sqrt{3}$
90	$\pi/2$	1	0	x
120	$\frac{2\pi}{3}$	$\sqrt{3}/2$	-0,5	$-\sqrt{3}$
135	$\frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
150	$5\pi/6$	0,5	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$
180	π	0	-1	0
210	$7/6\,\pi$	-0,5	$-\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
225	$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1
240	$4\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	-0,5	$\sqrt{3}$
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	x
300	$5\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	0,5	$-\sqrt{3}$
315	$7/4\,\pi$	$-\sqrt{\ }/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
330	$11/6\,\pi$	-0,5	$\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$
360°	2π	0	1	0

Allg.

1) $R_1\,(200 \pm 5)\Omega$, $R_2\,(300 \pm 3)\Omega$
$R_3\,(500 \pm 5)\Omega$
$R_1 \,//\, (R_2 + R_3)$ ges: Fehler

$R = \frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3}$

$\Delta R = \left|\frac{\partial R}{\partial R_1}\right| \cdot \Delta R_1 + \left|\frac{\partial R}{\partial R_2}\right| \Delta R_2 + \left|\frac{\partial R}{\partial R_3}\right| \Delta R_3$

$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{\partial R}{\partial R_3} = \frac{R_1^2}{(R_1+R_2+R_3)^2}$

$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{(R_2+R_3)^2}{(R_1+R_2+R_3)^2}$

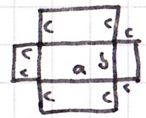
$\Delta R = \frac{320}{100} + \frac{12}{100} + \frac{20}{100} = 3{,}52$

2) Innendurchmesser Rohr bestimmen, Länge l, $\varnothing\, d$, ρ Dichte

$\rho = \frac{m}{V}$, $V = \pi \frac{d^2}{4} l$, $d = \sqrt{\frac{4m}{\pi \rho l}}$

analog 1)

$\frac{\partial d}{\partial m} = \frac{1}{\sqrt{\pi m l \rho}}$, $\frac{\partial d}{\partial l} = -\sqrt{\frac{m}{\pi l^3 \rho}}$, $\frac{\partial d}{\partial \rho} = -\sqrt{\frac{m}{\pi l \rho^3}}$

3) 

$A = ab + 2ac + 2bc$

$V = abc$

V gegeben, ges.: minimum Blech(A)

$A = f(a,b) = ab + 2\frac{V}{b} + 2\frac{V}{a}$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial A}{\partial a}}_{A_a}$; $\underbrace{\frac{\partial A}{\partial b}}_{A_b}$ $\Rightarrow A_a = 0$, $A_b = 0$

D (Hesse Matrix) nicht nötig!

-> muss min sein

4) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ Extremw. = ?

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2}\}$

$\Rightarrow$ Additionstheorem: $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x + \cos(x+y)$ I.

$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos y + \cos(x+y)$ II

I in II.

$0 = \cos x - \cos y$

$\Rightarrow x = y$ -> in $\frac{\partial f}{\partial x}$

$\Rightarrow$ quadr. Gl $u = \cos x$

$y = x = \frac{\pi}{3}$