Herleitung: Kubische Interpolation für mittlere Teilstücke (Aufgabe 2.1)

Für den Abstand zweier benachbarten Stützstellen gilt: $h = (x_{i+1} - x_i)$

$$|p^*(x) - f(x)| \leqslant \frac{\|f^{3+1}\|_\infty}{(3+1)!} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

Nun setzen wir: $x = x_1 + t(x_2 - x_1)$

$$\begin{aligned}
|p^*(x) - f(x)| &\leqslant \frac{\|f^{3+1}\|_\infty}{(3+1)!} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \\
&\leqslant \frac{\|f^4\|_\infty}{4!} (h + th) \cdot (th) \cdot (-h + th) \cdot (-2h + th) \\
&\leqslant \frac{\|f^4\|_\infty}{4!} \big(h(1+t)\big) \cdot (th) \cdot \big(h(-1+t)\big) \cdot \big(h(-2+t)\big) \\
&\leqslant \frac{\|f^4\|_\infty}{4!} \cdot h^4 \cdot \underbrace{\big((-t + t^3) \cdot (-2 + t)\big)}_{\textit{Ableiten und gleich 0 setzen}}
\end{aligned}$$

$0 = -2t - 6t^2 + 4t^3 + 2$

$\rightarrow t_1 = -0.618,\ t_2 = 0.5,\ t_3 = 1.618$

Wir suchen das Maxima, für das gilt $t \in [0, 1] \rightarrow$ Das Maximum liegt bei $t_2 = 0.5$

Um nun die y-Koordinate zu bekommen, setzen wir t in die Ursprungsfunktion.

Unser gesuchtes Maximum besitzt die Koordinaten: $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{16}\right)$

Nun setzen wir die y-Koordinate in die Gleichung von oben ein und erhalten

$$\Rightarrow \frac{\|f^4\|_\infty}{4!} \cdot h^4 \cdot \frac{9}{16}$$

Zusammengefasst bekommen wir die Formel der kubischen Interpolation für mittlere Teilstücke

$$|f(x) - p(x)| \leqslant \frac{3h^4}{128} \max\{|f^{(4)}(\xi)| | \xi \in [a, b]\}$$