Hochschule München Fakultät 04 Redaktion: Kahl / Paster / Rauh Stand SS 2010

Praktikum Numerik **Versuch 3: "Integration und Differenziation"**

Bearbeiter: Dennis Kunz

Datum: 30.05.2012

1 Integration

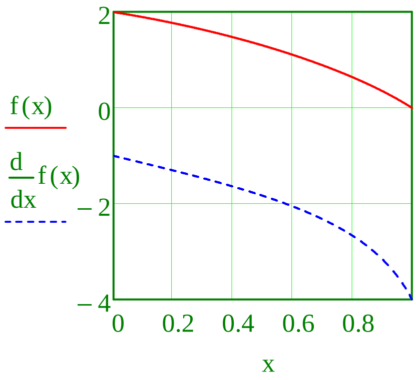
1.1 Genauigkeit bei verschiedenen Verfahren und Schrittweiten

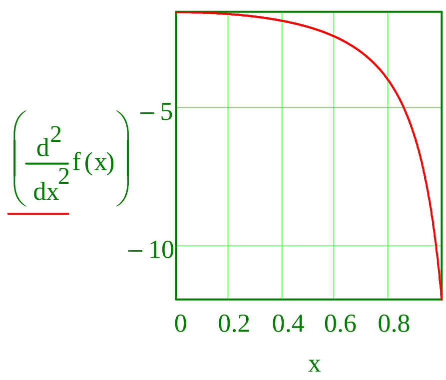
Von Ihrem Dozenten erhalten Sie eine zu integrierende Funktion **f(x)** *und die Zahlenwerte* **a** *und* **b** *für die Grenzen des bestimmten Integrals. Zur Bestimmung des tatsächlichen Integrationsfehlers wird das exakte Ergebnis* **sum_exakt** *mit Hilfe von Mathcad berechnet.*

$f(x) := \sqrt{4 - 3x^2} - x \qquad a := 0 \qquad b := 1$ **wird vom Dozenten vorgegeben (1)**

$$sum\_exakt := \int_a^b f(x)\,dx \rightarrow \frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{3}}{9} \qquad sum\_exakt = 1.20919958$$

Wir stellen den Verlauf der Funktion **f** *im Bereich* **[a,b]** *als Quickplot dar. Für Abschätzungen betrachten wir auch die ersten beiden (numerisch berechneten) Ableitungen von f(x).*





Beim Sehnentrapezverfahren teilen wir das Integrationsintervall in **n** *gleich breite Streifen ein. Wir planen verschiedene Werte von* **n***, die in Zweierpotenzen ansteigen und die wir in einem Vektor* **n_trap** *speichern.*

$i := 0..12 \qquad n\_trap_i := 2^{i+2}$ **wird vom Dozenten vorgegeben (2)**

$n\_trap^T =$

	0	1	2	3	4	5
0	4	8	16	32	64	...

Die Prozedur zur Berechnung einer Trapez-Näherung lautet:

```
trapez_int(fkt, a, b, n) := | hr ← (b − a) ÷ n
                            | u ← (fkt(a) + fkt(b)) ÷ 2
                            | for  i ∈ 1 .. n − 1
                            |   u ← u + fkt(a + i·hr)
                            | return  u·hr
```

Mit dieser Prozedur berechnen wir die Näherungswerte **sum_trap** *des Integrals für alle Werte in* **n_trap***, sowie deren Abweichungen* **err_trap** *vom Sollwert.*

$sum\_trap_i := trapez\_int(f, a, b, n\_trap_i) \qquad err\_trap_i := sum\_exakt - sum\_trap_i$

$err\_trap^T =$

	0	1	2	3	4
0	0.015	$3.873\cdot10^{-3}$	$9.743\cdot10^{-4}$	$2.44\cdot10^{-4}$	...

*In Ihrer **Vorbereitung** haben Sie die passende Restgliedformel zur Fehlerschätzung bereitgestellt. Definieren Sie für **n=16** die notwendigen Größen zur Auswertung der Formel und werten Sie die Formel (**err_max**) mit Mathcad aus.*

$hr := \frac{b-a}{16}$ $hr = 0.063$ Maximum der zweiten Ableitung: $maxd2f := -11.25$

$err\_max := \frac{hr^2}{12}\cdot(b-a)\cdot|maxd2f|$ $err\_max = 3.662\times10^{-3}$

*Vergleichen Sie den tatsächlichen Fehler **err_trap** mit der theoretischen Fehlerschätzung **err_max**. Wie erklären Sie die Abweichung?*

err_max entspricht den Fehler für i=1

*Berechnen Sie den Richardson-Schätzwert **err_rich** für die gleiche Streifenzahl **n** wie oben und vergleichen Sie mit dem tatsächlichen Fehler aus **err_trap**.*

$err\_rich := \frac{(sum\_trap_2 - sum\_trap_1)}{2^2-1}$ $err\_rich = 9.663\times10^{-4}$ $err\_trap_2 = 9.743\times10^{-4}$

Wie beurteilen Sie die Qualität der Fehlerschätzung?

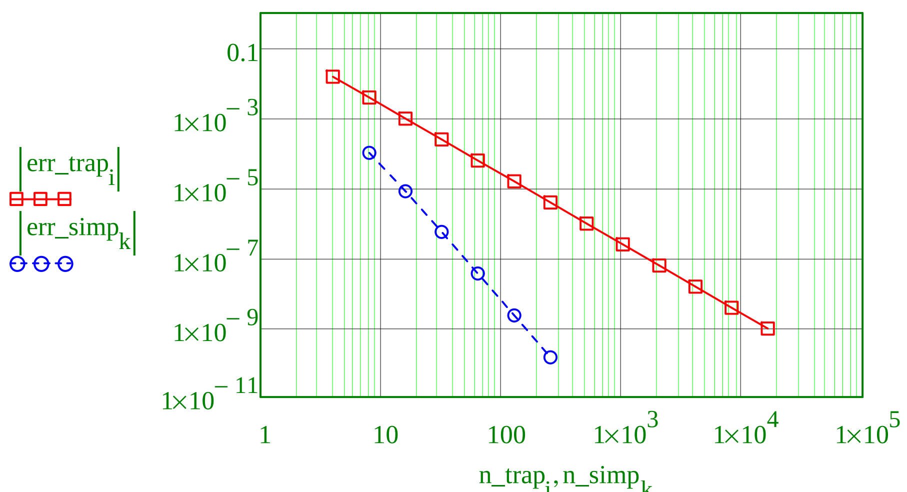
Die Fehler haben etwa gleiche Größenordnung

*Die Richardson-Extrapolation (**warum** anwendbar?) erlaubt die Berechnung verbesserter Näherungswerte **sum_simp**, nämlich entsprechend der Simpson-Formel aus den oben gespeicherten Werten **sum_trap**. Berechnen Sie die Werte **sum_simp** und ihre Fehler **err_simp** für Streifenzahlen **n** aus dem hier definierten Vektor **n_simp**.*

$k := 0..6$ $n\_simp_k := 2^{k+2}$ $n\_simp^T = (0\ \ 8\ \ 16\ \ 32\ \ 64\ \ 128\ \ 256)$ **Achtung jetzt:** $k := 1..6$

$sum\_simp_k := \frac{(4\cdot sum\_trap_k - sum\_trap_{k-1})}{3}$ $err\_simp_k := sum\_exakt - sum\_simp_k$

*In einem gemeinsamen log-log-Diagramm stellen wir den Verlauf der Beträge der Fehler **err_trap** und **err_simp** über der Streifenzahl **n** dar.*

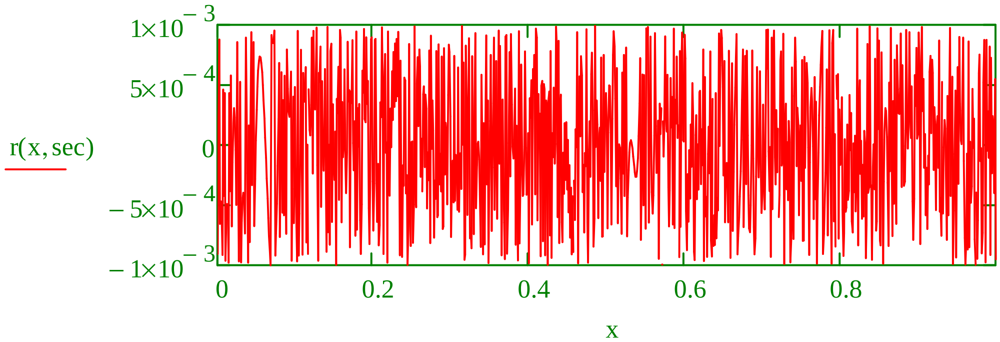


Welche Gestalt haben die Kurven (warum?) und wie erkennen wir die Fehlerordnung der Verfahren?
Die Kurven haben die Gestalt von Geraden (doppellogarithmisch), da der Fehler antiproportional zur Anzahl n der Stützstellen ist. Die Fehlerordnung erkennt man aus der Steigung: TP-Fehlerordnung = 2 und S-Fehlerordnung = 4

1.2 Einfluss gestörter Daten

Wir stören nun jeden Abtastwert der Funktion **f(x)** *durch Addition einer kleinen, pseudo-zufälligen Störung* **r(x,s)** *aus dem Wertebereich* **[-s , s]** *mit* **s** *= 10^{-3}.*

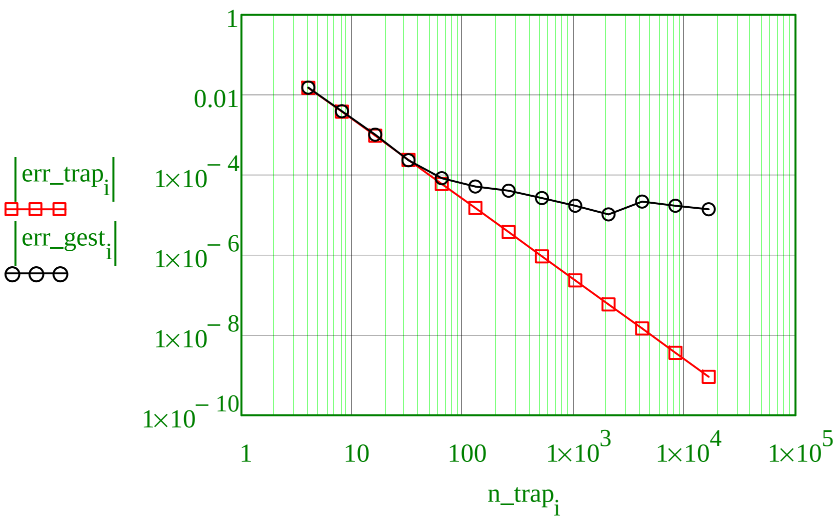
$$r(x,sec) := \begin{array}{|l} z \leftarrow (x+\pi)^{10} \\ z \leftarrow z - \mathrm{trunc}(z) - 0.5 \\ \text{return } 2 \cdot sec \cdot z \end{array} \qquad sec := 10^{-3}$$



Die gestörte Funktion **g(x)** *ist also:* $g(x) := f(x) + r(x,sec)$

Wir integrieren **g(x)** *mit dem Sehnentrapezverfahren genau wie oben* **f(x)** *und stellen die Fehler* **err_gest** *über* **n_ntrap** *dar. Zum Vergleich tragen wir auch die ungestörten Ergebnisse* **err_trap** *ein.*

$$err\_gest_i := sum\_exakt - trapez\_int(g, a, b, n\_trap_i)$$



Die grobe Interpretation:

Rote Kurve: Verfahrensfehler
Schwarze Kurve: Rechnungsfehler
Mit immer kleinere n, also höhre h, strebt der Fehler mit Störung gegen einen Grenzwert.
Für kleine n überwiegt Verfahrensfehler, für großer der Rechnungsfehler

2 Differenziation

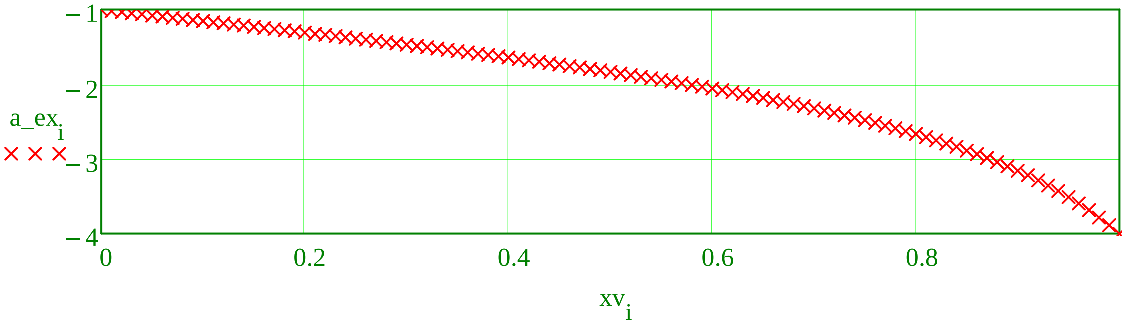
2.1 Genauigkeit bei verschiedenen Verfahren und Schrittweiten

Für unsere Untersuchungen legen wir wieder die oben definierte Funktion **f** *auf* **[a,b]** *zu Grunde. Als Referenz für die 1.Ableitung verwenden wir den (von Hand berechneten) Formelausdruck* **abl_exakt(x)**.

$$abl\_exakt(x) := \frac{-3x}{\sqrt{4-3x^2}} - 1$$

Wir speichern einen Datensatz von exakten Werten der Ableitung und stellen ihn über **x** *grafisch dar:*

$$i := 0..100 \qquad xv_i := \frac{b-a}{100} \cdot i + a \qquad yv_i := f(xv_i) \qquad a\_ex_i := abl\_exakt(xv_i)$$



*Wir wählen Stützweiten **h** und dann **2h**, differenzieren jeweils numerisch nach zwei Verfahren und stellen die Fehlerbeträge grafisch über **x** dar:*

wird vom Dozenten vorgegeben (3)

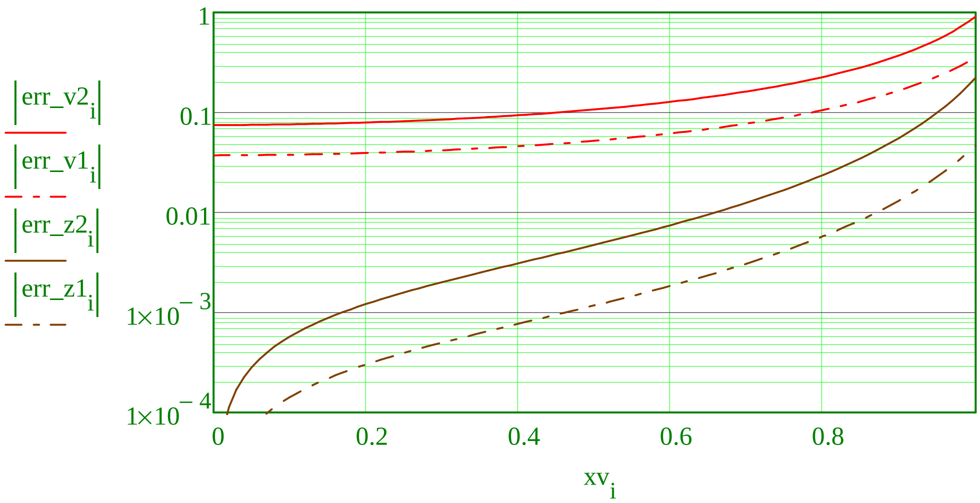
$hr := 0.05$

Vorwärts-Differenzenquotient: $vdq(fkt, hr, x) := \frac{fkt(x+hr) - fkt(x)}{hr}$

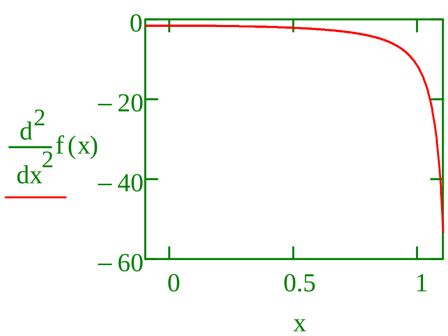
$av1_i := vdq(f, hr, xv_i)$ $av2_i := vdq(f, 2\cdot hr, xv_i)$ $err\_v1_i := a\_ex_i - av1_i$ $err\_v2_i := a\_ex_i - av2_i$

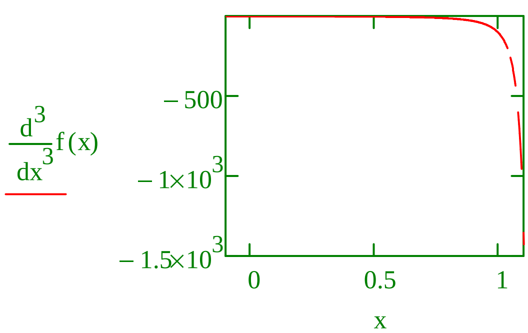
Zentraler Differenzenquotient: $zdq(fkt, hr, x) := \frac{fkt(x+hr) - fkt(x-hr)}{2\cdot hr}$

$az1_i := zdq(f, hr, xv_i)$ $az2_i := zdq(f, 2\cdot hr, xv_i)$ $err\_z1_i := a\_ex_i - az1_i$ $err\_z2_i := a\_ex_i - az2_i$



*In Ihrer **Vorbereitung** haben Sie die nötigen Restgliedformeln bereitgestellt. Schreiben Sie entsprechende Mathcad-Funktionen **err_max_vdq** und **err_max_zdq** und berechnen Sie damit die jeweils theoretisch maximal zu erwartenden Fehler. Die benötigten Werte der Ableitungen können Sie den folgenden Diagrammen entnehmen (Benützen Sie zum Ablesen "Koordinaten ablesen" im Kontextmenü der Diagr.).*





$err\_max\_vdq(hr, maxabl) := \frac{hr}{2} \cdot |maxabl|$ $maxabl := -54$ $err\_max\_vdq(0.05, maxabl) = 1.35$

$err\_max\_vdq(0.1, maxabl) = 2.7$

$err\_max\_zdq(hr, maxabl) := \frac{hr^2}{6} \cdot |maxabl|$ $maxabl := -1426$ $err\_max\_zdq(0.05, maxabl) = 0.594$

$err\_max\_zdq(0.1, maxabl) = 2.377$

Vergleichen Sie mit den maximalen Werten aus Ihren obigen Grafiken.Nehmen Sie auch Stellung zur Fehlerordnung der beiden Verfahren.

VDQ: Halbierung Schrittweite -> Halbierung des Fehlers -> Fehlerordnung 1

ZDQ: Halbierung Schrittweite -> Vierteln des Fehlers -> Fehlerordnung 2

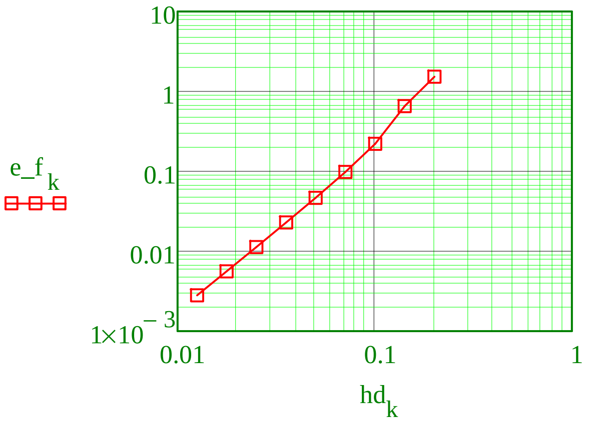
Bisher haben wir die Fehler über der Abszisse **x** *dargestellt. Jetzt soll als Abszisse die Stützweite* **h** *dienen. Wir wählen verschiedene Stützweiten aus einem Vektor* **hd**, *berechnen wie oben den Fehlerverlauf des Zentralen Differenzenquotienten und suchen - mit der folgenden Prozedur* ***err_max*** *- jeweils den maximalen Fehlerbetrag über* **x**.

```
err_max(fkt, hr, xv, a_ex) := | for i ∈ 0 .. length(xv) − 1
                              |    errb_i ← |a_ex_i − zdq(fkt, hr, xv_i)|
                              | return max(errb)
```

$k := 0..8$ $hd_k := hr \cdot 2^{0.5k-2}$

wird vom Dozenten vorgegeben (4)

$e\_f_k := err\_max(f, hd_k, xv, a\_ex)$



$$hd = \begin{pmatrix} 0.013 \\ 0.018 \\ 0.025 \\ 0.035 \\ 0.05 \\ 0.071 \\ 0.1 \\ 0.141 \\ 0.2 \end{pmatrix} \qquad hr = 0.05$$

Wie interpretieren Sie den Verlauf?

Näherungsweise eine Parabel mit h^2

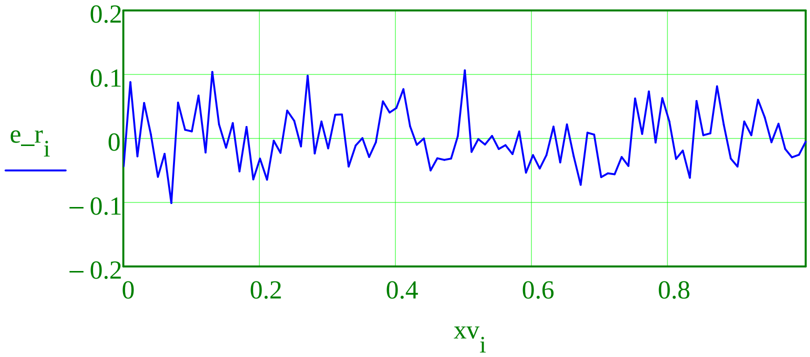
2.2 Einfluss gestörter Daten

Störungen in den Abtastwerten der Funktion können die Ergebnisse der numerischen Differenziation erheblich beeinflussen. Zur Demonstration können wir wie bei der Integration zunächst die Störfunktion isoliert differenzieren. Wir verwenden die gleiche Störfunktion **r(x, s)** *wie bei der Integration mit einem geeigneten Skalierungsfaktor* **s** *und sehen uns als Erstes das Ergebnis ihrer Differenziation an:*

$hr := 0.1$

wird vom Dozenten vorgegeben (5)

$sec := 0.05 \cdot err\_max(f, hr, xv, a\_ex$ $sec = 0.011$ $r(xv) := r(xv, sec)$ $e\_r_i := zdq(r, hr, xv_i)$



*In Ihrer **Vorbereitung** haben Sie die Formel für den Einfluss von Störungen der Stützwerte auf das Ergebnis der Differenziation bereitgestellt. Berechnen Sie den Zahlenwert für den vorliegenden Fall.*

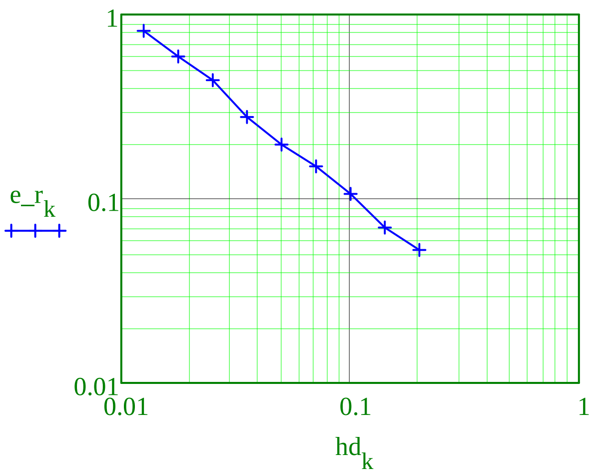
Dz,neu = Dz + s/h = Dz + 0.11

Vergleichen Sie das Mathcad-Ergebnis mit der Theorie.

max(e_ri)) = 0.1.06 < s/h = 0.11 ist erfüllt

*Wir berechnen jetzt den Einfluss der Störung, abhängig von der Stützweite **h**.*

$i := 0..100 \quad a\_soll_i := 0 \qquad e\_r_k := err\_max(r, hd_k, xv, a\_soll)$

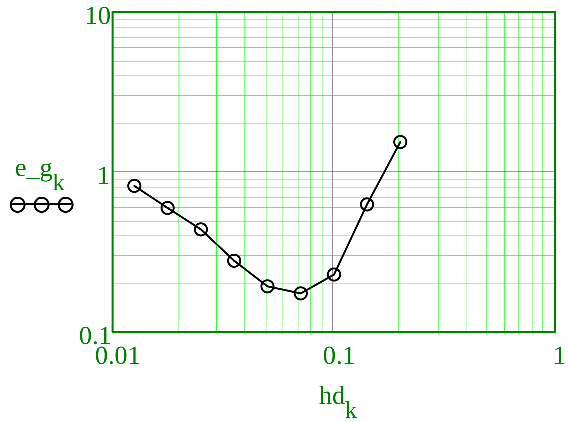


Interpretieren Sie das Ergebnis.

Näherungsweise linear in doppellogarithmischer Darstellung bzw. hyperbelförmig in linearer

*Die zu differenzierende, gestörte Funktion **g(x)** ist die Summe aus der ungestörten Funktion **f(x)** und der Störfunktion **r(x)**. Wir berechnen den Gesamtfehler in Abhängigkeit von der Stützweite **h:***

$g(xv) := f(xv) + r(xv) \quad e\_g_k := err\_max(g, hd_k, xv, a\_ex)$



Es zeigt sich ein interessanter Verlauf, dessen Kenntnis für die Praxis wichtig ist. Interpretieren Sie ausführlich dieses Ergebnis.

Es gibt eine optimale Schrittweite, bei dem der Gesamtfehler minimal ist.
Dieser Verlauf ergibt sich, weil der Verfahrensfehler ~ h^p sich mit dem Rechnungsfehler ~ 1/h überlagert und ein absoltues Minimum erzeugt.
Für große h überwiegt der Verfahrensfehler, für kleine der Rechnungs-/Rundungsfehler