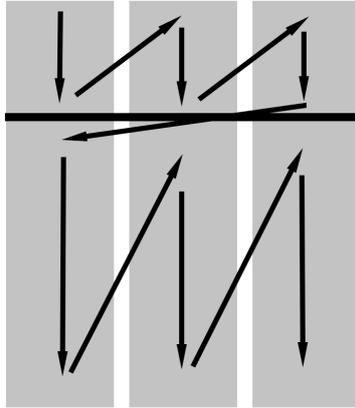


Kommentar:

- Grundlage: Vorlesung & Folien Regelungstechnik I von Prof. Graf (SS2011)
DGLs und Laplace Transformation aus dem Skript Signale & Systeme von Prof. Müller
- Es können immernoch Fehler enthalten sein, prüft dies selber am Skript nach
- Drucken mit Einstellung im Druckbildschirm des Adobe Reader => Auf Druckbereich verkleinern
- Normaler Aufbau: Pro Seite je 3 Spalten, Spaltenwechsel bei Querstrich oder Seitenwechsel



1. Einführung

Aufgabe einer Regelung:
 In technischen Anlagen physikalische Größen (Regelgrößen) trotz des Einflusses äußerer Störungen konstant zu halten oder allgemeiner dem zeitlichen Verlauf vorgegebener Größen (Führungsgrößen) möglichst genau nachzuführen.

- Führungsverhalten
- Störverhalten
- geschlossener Wirkungsablauf (Änderung wirkt auf sich selbst zurück)
- Vorzeichenumkehr im RK (Änderung wirkt der Änderung entgegen)

Typen:

- Festwertregelung
- Folgeregelung
- Verhältnissregelung

Merkmale einer Regelung:
 Fortlaufendes Vergleichen des Istwertes der Regelgröße mit dem Sollwert, wobei aus der Differenz der beiden ein Signal gebildet wird, das den Istwert stets in Richtung des Sollwerts führt.
 => Notwendig für Regelung:

- Messung der Regelgröße (Meßglied)
- Beeinflussung der Regelgröße (Stellglied)

Beispiele für Regelungen:

- Heizung
- Füllstand
- Drehzahl
- Thyroxin
- Ökonomische Regelvorgänge

Allgemeiner Regelkreis:

Kombination von Steuerung und Regelung:

- Steuerung für Führungsverhalten (feedforward-control)
- Regelung für Störverhalten (feedback-control)

Wichtig für die Funktion ist das zeitliche Verhalten (die Dynamik) der Regelstrecke und des Reglers.

Lösungsweg für Regelungsaufgaben:

Reglerentwurf

Modellbildung: **Modell der Regelstrecke** (ideale Welt) → **Regelgesetz**

Realisierung (analog/digital): **Regler** (gesucht)

Prozezebene (reale Welt / Hardware): **Regelstrecke mit Sensorik und Aktorik** (gegeben) → **Regler** (gesucht)

2. Math. Behandlung von Regelkreisen

Aufstellen der Differentialgleichung (Modellbildung):

- aus physikalischen Grundgleichungen
- experimentell durch Messen von Zeitverläufen

=> Lösung der Differentialgleichung:

- im Zeitbereich (homogene, partikuläre Lsg, Anfangsbedingungen)
- im Frequenzbereich (Laplace Transformation)

Vorgehen:

- Differentialgleichung aufstellen => Laplace Transformation
- Algebraische Gleichung => Anfangswerte nullsetzen
- Übertragungsfunktion $F(s) = X_2(s) / X_1(s)$
- Frequenzgang $F(j\omega) = X_2(j\omega) / X_1(j\omega)$

Amplitudengang: $|F(j\omega)|$
 Phasengang: $\angle F(j\omega)$

Elemente im Blockschaltbild:

- Wirkungslinie
- Additions- (Subtraktionsstelle)
- Verzweigungsstelle
- System: abgegrenzte Baugruppe, nur Ein-/Ausgangsverhalten relevant, nicht innerer Aufbau

System-Eigenschaften:

- rückwirkungsfrei
- linear

Nichtlineares Blockschaltbild - Absolutwerte / Großsignale

Betriebspunkt Linearisierung

1.) Alle Größen am stationären Betriebspunkt berechnen (braun)
 Vorgabe: $x_0 = 2$
 => $U_0 = x_0^3 = 8$
 => stationärer Betriebspunkt => alle Integriereingänge gleich null
 => $y_0 = 4$

2.) Linearisierungs-Tangente an Kennlinie im Betriebspunkt
 Tangente $U = U_0 + a \cdot (x - x_0)$
 $a = \frac{dU}{dx} \Big|_{x=x_0}$ hier: $3 \cdot x_0^2 = 12$
 $U - U_0 = a \cdot (x - x_0)$

3.) Lineares Blockschaltbild zeichnen

4.) Übertragungsfunktion berechnen
 $F_3(s) = 2 \cdot \frac{0.5}{1+2/s} = \frac{2}{s+2}$

Bedeutung des Frequenzgangs:

Zeitbereich

BSP: RL Glied
 $F(j\omega) = \frac{1}{1+3j\omega}$

Frequenzbereich

Ortskurve

Bode-Diagramm

Schaltung im Blockschaltbild:

Reihenschaltung: $X_2 = F_1 \cdot X_1$, $X_3 = F_2 \cdot X_2$, $X_4 = F_1 \cdot F_2 \cdot X_1$

Parallelschaltung: $X_3 = (F_1 + F_2) \cdot X_1$

Kreisschaltung:

$F_{BSP} = \frac{X_A}{X_E} = \frac{F_V}{1 + F_V \cdot F_R}$

Vorzeichen: Gegenteil vom Summationspunkt d.h. „+“ = Gegenkopplung, „-“ = Mitkopplung

Herleitung: I $X_A = F_V \cdot (X_1 - X_A)$
 II $X_A = F_R \cdot X_A$
 aus II in I => $X_A = F_V \cdot (X_1 - (F_R \cdot X_A))$ Merkgel: Vorwärts Üfkt 1 + Schleifen Üfkt

a) Lösung im Zeitbereich

- Lösung der homogenen DGL
- Bestimmung der partikulären Lösung
- Anfangsbedingungen einarbeiten

DGL 1. Ordnung:

Gemeinsame, allgemeine Darstellung für alle DGL 1. Ordnung in Normalform:

$$y' + q \cdot y = r; \quad q = \frac{1}{T}$$

Die 'rechte Seite' der DGL r wird auch 'Störfunktion' genannt und beschreibt die äußere(n) Quelle(n), die das betrachtete Netzwerk erregen.

Die Lösung der DGL erfolgt unter Verwendung eines geeigneten Lösungsansatzes in zwei Schritten:

- Lösung der homogenen DGL: $y' + q \cdot y = 0$ (allgemeine Lösung)
 Sie beschreibt das Netzwerkverhalten ohne äußere Quellen (deshalb mit $r = 0$).
- Lösung der inhomogenen DGL: $y' + q \cdot y = r$ (spezielle Lösung)
 Sie beschreibt das Netzwerkverhalten inklusive der äußeren Quelle(n).

Die gesuchte vollständige Lösung y ergibt sich unter Berücksichtigung des Anfangswertes aus der Summe der allgemeinen Lösung y_h der homogenen DGL und einer speziellen Lösung y_s der inhomogenen DGL:

$$y = y_h + y_s$$

Beispiel: Modellbildung beim Gleichstrommotor

induzierte Spannung: e_A

- Maschengleichung: $u_A(t) = R_A \cdot i_A(t) + L_A \frac{di_A}{dt} + e_A(t)$
- Induktion: $e_A(t) = 2\pi \cdot c \cdot \psi_m \cdot n(t)$
- Momentengleichung: $m_A(t) = c \cdot \psi_f \cdot i_A(t)$

Newton 2: $F = m \cdot a = m \cdot w'$
 Rotation: $M = j \cdot w'$ (j = Trägheitsmoment, w = Winkelbeschleunigung)

=> IV) $m_A(t) - m_w(t) = 2\pi \cdot j \cdot \frac{dn(t)}{dt}$

DGL in Laplace Bereich bringen:

- $U_A(s) = (R_A + sL_A) \cdot I_A(s) + E_A(s)$
- $E_A(s) = 2\pi \cdot c \cdot \psi_m \cdot N(s)$
- $M_A(s) = c \cdot \psi_f \cdot I_A(s)$
- $M_A(s) - M_w(s) = 2\pi \cdot j \cdot s \cdot N(s)$

Strategie zum Umformen vermaschter Blockschaltbilder:

- Summations- und Verzweigungspunkte mit unterschiedlicher Farbe markieren.
- Gleichartige und in Nachbarschaft liegende Stellen zusammenfassen
- NICHT zusammenfassen wenn eine andersartige Stellen dazwischen liegt

Die allgemeine Lösung d.h. die Lösung der homogenen DGL findet man durch den Ansatz $y_h = A \cdot e^{\lambda t}$ mit der zugehörigen Ableitung $y_h' = \lambda \cdot A \cdot e^{\lambda t}$.

Beides wird eingesetzt: $y_h' + q \cdot y_h = \lambda \cdot A \cdot e^{\lambda t} + q \cdot A \cdot e^{\lambda t} = (\lambda + q) \cdot A \cdot e^{\lambda t} = 0$

Die CHARAKTERISTISCHE GLEICHUNG, die alle Informationen über das dynamische Verhalten des betrachteten Netzwerks enthält, besitzt bei DGL 1. Ordnung immer eine reelle Lösung:

Für den reellen Eigenwert λ wird sie gleich Null. $\lambda + q = 0 \Rightarrow \lambda = -q$

Mit diesem Ergebnis erhält man als allgemeine Lösung $y_h = A \cdot e^{-q \cdot t} = A \cdot e^{-t/T}$

Als Folge des reellen Eigenwertes ergibt sich als EIGENBEWEGUNG immer eine Exponentialfunktion, deren Verhalten durch die Zeitkonstante $T = \frac{1}{q}$ charakterisiert wird.

Betrachtet man passive, technische Anordnungen mit Widerständen, reinen Spulen und realen Kondensatoren, ist immer mindestens ein ohmscher Widerstand $R > 0$ vorhanden, der Energie aufzehrt und somit zu abklingenden Zeitfunktionen führt.

Dann gilt: Ist r ein Gleichsignal (U_0, I_0) oder ein periodisches Wechselsignal, stellt sich nach dem Durchlaufen der Ausgleichsvorgänge ein neuer stationärer Zustand ein.

Die Funktion, die diesen neuen eingeschwungenen Zustand beschreibt, ist eine spezielle Lösung y_s der inhomogenen DGL.

Für die spezielle Lösung d.h. die Lösung der inhomogenen DGL kann man auch abhängig von der Bauform der Störfunktion r die in der Tabelle zusammengestellten Ansätze verwenden.

Verlegen von Summations- und Verzweigungsstellen

Lineares System bei Einwirken von U_A und U_w :

- Verstärkungssatz: Verdoppelung des Eingangssignals führt zur Verdoppelung des Ausgangssignals
- Überlagerungssatz: Die Einzelwirkungen von 2 Eingangssignalen überlagern sich additiv am Ausgang

=> $N(s) = F_{3s}(s) \cdot U_A(s) + F_{sw}(s) \cdot M_w(s)$

=> mit $F_{sw}(s) = \frac{N(s)}{M_w(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\pi \cdot j \cdot s} \cdot 2\pi \cdot (c \cdot \psi_f)^2 \cdot \frac{1}{R_A + sL_A}}$

Störfunktion, rechte Seite der DGL	r	Ansatz für die spezielle Lösung	y_s
k	K	K	K
$k \cdot e^{\alpha t}$, $\alpha \neq \lambda$ (Eigenwert)	$K \cdot e^{\alpha t}$	$K \cdot e^{\alpha t}$	$K \cdot e^{\alpha t}$
$k \cdot t \cdot e^{\alpha t}$, $\lambda = \alpha$ (Eigenwert)	$K \cdot t \cdot e^{\alpha t}$	$K \cdot t \cdot e^{\alpha t}$	$K \cdot t \cdot e^{\alpha t}$
$a_0 \cdot t^n$	$A_0 + A_1 \cdot t + A_2 \cdot t^2 + \dots + A_n \cdot t^n$	$A_0 + A_1 \cdot t + A_2 \cdot t^2 + \dots + A_n \cdot t^n$	$A_0 + A_1 \cdot t + A_2 \cdot t^2 + \dots + A_n \cdot t^n$
$k_1 \cdot \sin(mt)$	$K_1 \cdot \sin(mt) + K_2 \cdot \cos(mt) = K \cdot \sin(mt + \varphi)$	$K_1 \cdot \sin(mt) + K_2 \cdot \cos(mt) = K \cdot \sin(mt + \varphi)$	$K_1 \cdot \sin(mt) + K_2 \cdot \cos(mt) = K \cdot \sin(mt + \varphi)$
$k_2 \cdot \cos(mt)$	$K_1 \cdot \sin(mt) + K_2 \cdot \cos(mt) = K \cdot \sin(mt + \varphi)$	$K_1 \cdot \sin(mt) + K_2 \cdot \cos(mt) = K \cdot \sin(mt + \varphi)$	$K_1 \cdot \sin(mt) + K_2 \cdot \cos(mt) = K \cdot \sin(mt + \varphi)$
$k_3 \cdot \sin(mt) + k_4 \cdot \cos(mt)$	$K_1 \cdot \sin(mt) + K_2 \cdot \cos(mt) = K \cdot \sin(mt + \varphi)$	$K_1 \cdot \sin(mt) + K_2 \cdot \cos(mt) = K \cdot \sin(mt + \varphi)$	$K_1 \cdot \sin(mt) + K_2 \cdot \cos(mt) = K \cdot \sin(mt + \varphi)$

Vorgehensweise:

- y_s = Jeweiliger Ansatz
- y_s ableiten sooft wie nötig
- y_s und dessen Ableitung in die Originalfunktion einsetzen
- Koeffizienten bestimmen

Bauelemente der Elektrotechnik:

$i_R(t)$	$i_L(t)$	$i_C(t)$
$u_R(t)$	$u_L(t)$	$u_C(t)$
$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$	$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$	$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i_C(t) dt$
$i_R(t) = \frac{1}{R} \cdot u_R(t)$	$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int u_L(t) dt$	$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$

8) Lösung im Zeitbereich - DGL 2. Ordnung

Zur Lösung verwendet man die allgemeine Darstellung der DGL 2. Ordnung in der Normalform.

Die rechte Seite der DGL r wird auch Störfunktion genannt und beschreibt die äußere(n) Quelle(n), die das betrachtete Netzwerk erregen.

Die Lösung der DGL erfolgt analog zum Vorgehen auf Seite 55 wieder in zwei Schritten:

1. Lösung der homogenen DGL: $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ (allgemeine Lösung)

Sie beschreibt das Netzwerkverhalten ohne äußere Quellen (deshalb mit $r = 0$).

2. Lösung der inhomogenen DGL: $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = r$ (spezielle Lösung)

Sie beschreibt das Netzwerkverhalten inklusive der äußeren Quelle(n).

Die gesuchte vollständige Lösung y ergibt sich unter Berücksichtigung der beiden Anfangswerte aus der Summe der allgemeinen Lösung y_h der homogenen DGL und einer speziellen Lösung y_s der inhomogenen DGL:

$y = y_h + y_s$

Die allgemeine Lösung d.h. die Lösung der homogenen DGL findet man auch hier durch den Ansatz

$y_h = A \cdot e^{\lambda_1 t}$ und damit $y_h' = \lambda_1 \cdot A \cdot e^{\lambda_1 t}$ sowie $y_h'' = \lambda_1^2 \cdot A \cdot e^{\lambda_1 t}$.

Setzt man diese Ausdrücke in die DGL ein, erhält man die folgende Gleichung:

$\lambda^2 \cdot A \cdot e^{\lambda t} + p \cdot \lambda \cdot A \cdot e^{\lambda t} + q \cdot A \cdot e^{\lambda t} = (\lambda^2 + p \cdot \lambda + q) \cdot A \cdot e^{\lambda t} = 0$

Die CHARAKTERISTISCHE GLEICHUNG, die alle Informationen über das dynamische Verhalten des betrachteten Netzwerkes enthält, ist bei DGL 2. Ordnung immer eine quadratische Gleichung:

$\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0$

die für die beiden Eigenwerte λ_1, λ_2 gleich Null wird.

Abhängig von den Werten von p und q sind für die Lösungen drei Fälle zu unterscheiden.

$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ mit der Diskriminante $D = \frac{p^2}{4} - q$

Fall 1: Für $D > 0$ erhält man zwei verschiedene, reelle Eigenwerte: Aperiodisches Verhalten

$\lambda_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D}$ und $\lambda_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D}$ und damit $y_h = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$

Fall 2: Für $D = 0$ erhält man zwei gleiche, reelle Eigenwerte: Aperiodischer Grenzfall

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{p}{2}$ und damit $y_h = A \cdot e^{\lambda t} + t \cdot B \cdot e^{\lambda t}$

Fall 3: Für $D < 0$ tritt ein konjugiert komplexes Paar von Eigenwerten auf

$\lambda_1 = -\frac{p}{2} + j \cdot \sqrt{-D} = \alpha + j \cdot \beta$ und $\lambda_2 = -\frac{p}{2} - j \cdot \sqrt{-D} = \alpha - j \cdot \beta$ und damit

$y_h = A \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta \cdot t) + B \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta \cdot t) = C \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta \cdot t + \varphi)$

Bei $p > 0$ ist $\alpha < 0$ und die für das Abklingen der Schwingung maßgebliche Zeitkonstante T_{Ab} berechnet sich aus dem Realteil zu $T_{Ab} = -1/\alpha$.

Der Imaginärteil $\beta > 0$ bestimmt die Kreisfrequenz, mit der die EIGENSCHWINGUNG ausgeführt wird. Nur im Fall 3 ist das Netzwerk SCHWINGUNGSFÄHIG!

Beim Ermitteln der speziellen Lösung der inhomogenen DGL 2. Ordnung verfährt man analog, wie es auf Seite 55 für die DGL 1. Ordnung erläutert ist. Die Tabelle ist jedoch für die DGL 2. Ordnung nicht vollständig, da hier weitere Sonderfälle auftreten können.

9) Lösung im Frequenzbereich

mit $s = j \cdot \omega$

$\underline{E}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$

DGL: $u_C + \frac{1}{s} u_C = \frac{1}{s} u$ mit $u = U_0 = 10V$; $\tau = RC = 2 \text{ sec}$; $U_{C0} = 5V$

Beim Übergang in den Bildbereich und zur Lösung der DGL sind folgende Schritte erforderlich:

1. Zeitfunktionen (kleine Buchstaben) werden durch Bildfunktionen (große Buchstaben mit dem Argument s) ersetzt: $u_C(t) \Rightarrow \underline{U}_C(s)$

2. Abgeleitete Zeitfunktionen werden nach Seite 63 (Differenzieren im Zeitbereich) ersetzt: $u_C' \Rightarrow s \cdot \underline{U}_C(s) - u_C(0) = 0$

Auf diese Weise wird der Anfangswert der Kondensatorspannung für $t=0$ berücksichtigt.

3. Da uns die Signale nur für positive Zeiten interessieren, sorgt man dafür, dass der Sprung der Spannungsquelle u von $0V$ zur Zeit $t=0$ erfolgt (wenn nötig Einschaltzeitpunkte verschieben oder modifizierte Zeitchase verwenden).

Im Bildbereich entspricht dies nach Korrespondenz Nr. 2 dem U_C -fachen Einheitsimpuls:

$u \Rightarrow \frac{U_0}{s}$

4. Die DGL im Bildbereich lautet damit: $s \cdot \underline{U}_C(s) - U_{C0} + \frac{1}{s} \underline{U}_C(s) = \frac{1}{s} U_0$

5. Auflösen nach der gesuchten Größe $\underline{U}_C(s)$:

$\underline{U}_C(s) \cdot (s + \frac{1}{s}) - U_{C0} = \frac{1}{s} U_0$; $\underline{U}_C(s) = \frac{U_0 + U_{C0}}{s + 1/\tau}$

6. Zeigen der Bildfunktion in Partialbrüche:

$\underline{U}_C(s) = \frac{s + \tau}{s(s + 1/\tau)} + \frac{U_{C0}}{s + 1/\tau}$

7. Die gleichweise Rücktransformation (mit $a = \frac{1}{\tau}$ nach Nr. 11 bzw. Nr. 5) und Addition der beiden Teilfunktionen ergibt die gesuchte Zeitfunktion:

$u_C(t) = [\frac{U_0}{\tau} \cdot \frac{(1 - e^{-t/\tau})}{1/\tau} + U_{C0} \cdot e^{-t/\tau}] \cdot \sigma(t)$

$u_C(t) = [10V \cdot (1 - e^{-t/2 \text{ sec}}) + 5V \cdot e^{-t/2 \text{ sec}}] \cdot \sigma(t)$

$u_C(t) = [10V - 5V \cdot e^{-t/2 \text{ sec}}] \cdot \sigma(t)$

Grenzwertsätze für $f(t)$: $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot \underline{E}(s)]$

$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot \underline{E}(s)]$

Operatoren im Zeitbereich und deren Entsprechungen im Bildbereich

• Berücksichtigung einer Konstante: $\mathcal{L}\{K \cdot f(t)\} \Rightarrow K \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} = K \cdot \underline{E}(s)$

• Bildung einer Summe oder einer Differenz: $\mathcal{L}\{f_1(t) \pm f_2(t)\} \Rightarrow \mathcal{L}\{f_1(t)\} \pm \mathcal{L}\{f_2(t)\} = \underline{E}_1(s) \pm \underline{E}_2(s)$

• Integration im Zeitbereich: $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau) d\tau\} \Rightarrow \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} \underline{E}(s)$

• Differenzieren im Zeitbereich: $\mathcal{L}\{\frac{df(t)}{dt}\} \Rightarrow s \cdot \underline{E}(s) - f(t=0^+)$

$\mathcal{L}\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\} \Rightarrow s^2 \cdot \underline{E}(s) - s \cdot f(t=0^+) - f'(t=0^+)$

$\mathcal{L}\{\frac{d^3 f(t)}{dt^3}\} \Rightarrow s^3 \cdot \underline{E}(s) - s^2 \cdot f(t=0^+) - s \cdot f'(t=0^+) - f''(t=0^+)$

• Dämpfung im Zeitbereich: $e^{-\alpha t} \cdot f(t) \Rightarrow \underline{E}(s + \alpha)$ wobei α beliebig komplex

• Normierungen mit $a > 0$ und reell: 1. der Zeit: $f(a \cdot t) \Rightarrow \frac{1}{a} \underline{E}(\frac{s}{a})$ 2. der Frequenz: $\underline{E}(a \cdot s) \Rightarrow \frac{1}{a} f(\frac{t}{a})$

• Zeit-Verschiebung: [Die Zeitfunktion nach der Verschiebung ist Null für $t < a$]: $f(t - a) \Rightarrow e^{-as} \cdot \underline{E}(s)$ wobei $a \geq 0$ und reell

zu b) Laplace-Tabelle

Korrespondenz-Tabelle (Teil 1)

Nr.	Bildfunktion $\underline{E}(s)$	Zeitfunktion $f(t)$	Bemerkungen
1	1	$\delta(t)$	Einheitsimpuls bei $t = 0$
2	$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$	Einheitsstepung bei $t = 0$ $f(t < 0) = 0$; $f(t > 0) = 1$
3	$\frac{1}{s^2}$	$t \cdot \sigma(t)$	Rampe
4	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \sigma(t)$	$n > 0$ und ganzzahlig
5	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at} \cdot \sigma(t)$	
6	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t \cdot e^{-at} \cdot \sigma(t)$	
7	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-at} \cdot \sigma(t)$	$n > 0$ und ganzzahlig
8	$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{e^{-t/a}}{a} \cdot \sigma(t)$	
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{t \cdot e^{-t/a}}{a} \cdot \sigma(t)$	
10	$\frac{1}{(1+as)^n}$	$\frac{a^{n-1} \cdot e^{-t/a}}{(n-1)!} \cdot \sigma(t)$	$n > 0$ und ganzzahlig
Nr.	Bildfunktion $\underline{E}(s)$	Zeitfunktion $f(t)$	Bem.
11	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1 - e^{-at}}{a} \cdot \sigma(t)$	
12	$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$\frac{1 - (1+a)t \cdot e^{-at}}{a^2} \cdot \sigma(t)$	
13	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$[1 - e^{-t/a}] \cdot \sigma(t)$	
14	$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$	$[1 - (1 + \frac{t}{a}) \cdot e^{-t/a}] \cdot \sigma(t)$	
15	$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$	$\frac{e^{-t/a} \cdot t \cdot \cos t}{a} \cdot \sigma(t)$	
16	$\frac{1}{s^2(1+as)}$	$[t - a \cdot (1 - e^{-t/a})] \cdot \sigma(t)$	
17	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{b-a} \cdot \sigma(t)$	$a \neq b$
18	$\frac{1}{(1+as)(1+bs)}$	$\frac{e^{-t/a} - e^{-t/b}}{a-b} \cdot \sigma(t)$	$a \neq b$
19	$\frac{1}{s^2(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b} [1 + \frac{b e^{-at} - a e^{-bt}}{b-a}] \cdot \sigma(t)$	$a \neq b$
20	$\frac{1}{s(s^2+a^2)(s+b)}$	$[1 + \frac{a e^{-bt} - b e^{-at}}{b-a}] \cdot \sigma(t)$	$a \neq b$
21	$\frac{1}{(s^2+a^2)(s+b)}$	$e^{bt} \cdot \sin(bt) \cdot \sigma(t)$	
21 a	$\frac{1}{(s^2+a^2)(s+b)}$	$e^{at} \cdot \sin(bt) \cdot \sigma(t)$	
22	$\frac{1}{s(s^2+a^2)(s-b)}$	$[\frac{e^{bt} - 1}{b} + \frac{e^{at} \cdot \sin(bt) \cdot \arctan(\frac{b}{a-b})}{b \cdot \sqrt{a^2+b^2}}] \cdot \sigma(t)$	
23	$\frac{1}{1+s^2+a^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-D^2}} \cdot \sin(\omega_0 \cdot \sqrt{1-D^2} \cdot t) \cdot \sigma(t)$	**)
24	$\frac{1}{s(1+s^2+a^2)}$	$[1 - \frac{e^{-\alpha t} \cos(\omega t)}{\sqrt{1-D^2}}] \cdot \sin(\omega_0 \cdot \sqrt{1-D^2} \cdot t + \arccos D) \cdot \sigma(t)$	**)
25	$\frac{1}{(s+a)(s^2+b^2)}$	$K \cdot e^{-at} \cdot \sin(bt + \varphi) \cdot \sigma(t)$	**)
26	$\frac{1}{(s+a)(s^2+b^2)}$	$[\frac{e^{-at} \cos(\omega t)}{\sqrt{1-D^2}} + \frac{e^{-at} \sin(\omega t)}{\sqrt{1-D^2}}] \cdot \sigma(t)$	$a \neq b \neq c$
27	$\frac{1}{(1+as)(1+bs)(1+cs)}$	$\frac{a(b-c)e^{-at} + b(c-a)e^{-bt} + c(a-b)e^{-ct}}{(a-b)(a-c)(b-c)} \cdot \sigma(t)$	$a \neq b \neq c$
28*)	$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$	$2 \sqrt{1-D^2} + \tau_{m0} \cdot e^{at} \cdot \sin(bt + \varphi) \cdot \sigma(t)$	$\varphi = \begin{cases} 180^\circ - \arctan \frac{b}{a} : \tau_{m0} > 0 \\ 90^\circ - \arctan \frac{b}{a} : \tau_{m0} = 0 \\ \arctan \frac{b}{a} : \tau_{m0} < 0 \end{cases}$

Bedeutungen und Wertebereiche der in den Gleichungen verwendeten Größen:

*) : $a \leq 0 \in$ Realteil des konj.-kompl. Polparameters; $\beta > 0 \in$ Imaginärteil des Polparameters
 **) : $\omega_0 > 0 \in$ Ungedämpfte Eigenkreisfrequenz; $0 \leq D < 1 \in$ Dämpfungsgrad

3. Regelstrecken

-180° | 0° Phase
 -180° | -90° \hookrightarrow Abhängig von Anzahl Polstellen

Proportionale Strecken

Bezeichnung: P (Proportional) T_x (Verzögerung X-ter Ordnung)
 DGL: $K_S =$ stationäre Verstärkung $T_x =$ Zeitkonstanten $\omega_0 =$ Kennkreisfrequenz

Typ	DGL	Sprungantwort $y(t) = \sigma(t)$	PN-Plan	Ortskurve	Bode Diagramm
PT_1	$K_S * y(t) = T_1 * \dot{x}(t) + x(t)$ Übertragungsfunktion $F_S(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{K_S}{T_1 * s + 1}$				
PT_2 nicht schwingungsfähig (D > 1)	$K_S * \omega_0^2 * x_c(t) = \ddot{x}_a(t) + 2 * D * \omega_0 * \dot{x}_a(t) + \omega_0^2 * x_a(t)$ Übertragungsfunktion $F_S(s) = \frac{X_a(s)}{X_c(s)} = \frac{K_S * \omega_0^2}{s^2 + 2 * D * \omega_0 * s + \omega_0^2}$				
PT_2 schwingungsfähig (0 < D < 1)	Siehe oben (PT2)				
PT_2 aperiodischer Grenzfall (D = 1)	Siehe oben (PT2)				

Integrierende Regelstrecken (z.B. Füllstandsstrecke, Positionregelung bei E-Motor)

$K_{IS} =$ Integralbeiwert

Typ	DGL	Sprungantwort $y(t) = \sigma(t)$	PN-Plan	Ortskurve	Bode Diagramm
I	$K_{IS} * x_c(t) = \dot{x}_a(t)$ Übertragungsfunktion $F_S(s) = \frac{X_a(s)}{X_c(s)} = \frac{K_{IS}}{s}$				
IT_1	$K_{IS} * x_c(t) = \dot{x}_a(t) + T_1 * \ddot{x}_a(t)$ Übertragungsfunktion $F_S(s) = \frac{X_a(s)}{X_c(s)} = \frac{K_{IS}}{s * (1 + T_1 * s)}$				
IT_2	Übertragungsfunktion $F_S(s) = \frac{X_a(s)}{X_c(s)} = \frac{K_I}{s * (\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2D}{\omega_0} s + 1)}$				

Spezielle Strecken

Strecken mit Totzeit	Übertragungsfunktion $F_S(s) = \frac{X_a(s)}{X_c(s)} = e^{-T_t * s}$				
Differenzierende Strecken	$K_{DS} * \dot{x}_c(t) = T_1 \dot{x}_a(t) + x_a(t)$ Übertragungsfunktion $F_S(s) = \frac{X_a(s)}{X_c(s)} = \frac{K_{DS} * s}{1 + T_1 * s}$				
Strecken mit Allpassverhalten	$K * [x_c(t) - T_1 * \dot{x}_c(t)] = T_1 * \dot{x}_a(t) + x_a(t)$ Übertragungsfunktion $F_S(s) = \frac{X_a(s)}{X_c(s)} = K * \frac{1 - T_1 * s}{1 + T_1 * s}$				

Übersicht Regler:

P-Regler: $F_R(s) = K_p$

I-Regler: $F_R(s) = \frac{K_I}{s}$

PI-Regler: $F_R(s) = K_p * (1 + \frac{1}{T_N * s}) = K_p * \frac{1 + T_N * s}{T_N * s}$

PD- T_D -Regler (real): $F_R(s) = K_p * \frac{1 + T_D * s}{1 + T_D * s}$

PD- T_D -Regler (ideal): $F_R(s) = K_p * (1 + T_D * s)$

PID-Regler (real): $F_R(s) = K_p * \frac{(1 + T_N * s)(1 + T_D * s)}{T_N * s * (1 + T_D * s)}$

PID-Regler (ideal): $F_R(s) = K_p * \frac{(1 + T_N * s)(1 + T_D * s)}{T_N * s}$

4. Verhalten linearer Regelkreise

Linearer Regelkreis

Führungs-Üfkt: $F_W = \frac{X}{W} = \frac{F_R F_S}{1 + F_R F_S}$

Stör-Üfkt: $F_Z = \frac{X}{Z} = \frac{-F_S}{1 + F_R F_S}$

Stellgröße: $Y(s) = \frac{F_R(s)}{1 + F_R(s)} * F_S(s)$

=> Charakteristische Gleichung:
 $1 + F_R(s) * F_S(s) = 0$
 oder: $Z_0(s) + N_0(s) = 0$
 => Lösen der Char. Gleichung sind die Polstellen des geschl. Regelkreises

=> Üfkt des offenen Regelkreises: $F_0(s) = F_R(s) * F_S(s)$

Zusammenhang offener und geschlossener Regelkreis:
 $F_W(s) = \frac{Z_0}{Z_0 + N_0}$ mit $F_0(s) = \frac{Z_0}{N_0}$

- ### Anforderungen an den Regelkreis:
- 1.) Stabilität
 - 2.) Gutes Führungsverhalten
 - 3.) Gutes Störverhalten
 - 4.) Robustheit

Zu 2.) Gutes Führungsverhalten

Führungssprungantwort

\hat{u} = Überschwingweite
 T_{AN} = Anregelzeit
 T_{AUS} = Ausregelzeit
 $x_d(\infty) = W(\infty) - X(\infty)$

stationäre Genauigkeit = keine bleibende Regeldifferenz => $x_d(\infty) = 0$

dynamische Forderungen:

- 1.) Dämpfung
 => relative Überschwingweite $\hat{u} = \frac{x_{max} - x(\infty)}{x(\infty)} * 100\%$
 => Ausregelzeit T_{AUS} (= Zeit bis entgültiger Eintritt ins Toleranzband)
- 2.) Schnelligkeit
 => Anregelzeit T_{AN}

Zu Stabilität:

Je höher die Streckenordnung ist umso schwieriger ist es, den RK zu stabilisieren => Es wird ein Regler höherer Ordnung benötigt

Begriffe:

- $F_W(s)$ = Übertragungsfkt geschl. Regelkreis / Führungsübertragungsfkt
- $F_0(s)$ = Übertragungsfkt offener Regelkreis
- $F_R(s)$ = Störungsübertragungsfkt
- $F_S(s)$ = Übertragungsfkt des Reglers
- $F_Z(s)$ = Übertragungsfkt der Strecke

Regelung einer PT₁ Strecke mit verschiedenen Reglern mit P-Regler

Üfkt des offenen Regelkreises: $F_0(s) = \frac{K_p * K_s}{1 + T_1 * s}$

Führungs-Üfkt: $F_W(s) = \frac{K_p * K_s}{1 + K_p * K_s + T_1 * s}$

Führungssprungantwort:

Fazit:
 Bei Verwendung eines P-Reglers tritt eine bleibende Regeldifferenz $x_d(\infty)$ auf

Gegenmaßnahmen zur Regeldifferenz $x_d(\infty)$ bei P-Reglern:

- 1.) Vergrößerung von K_p
 => macht die bleibende Regeldifferenz kleiner
 => macht den Regelkreis schneller
 ABER: Betrachtung der Stellgröße y

$F_v(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{F_R}{1 + F_R * F_S}$

=> $F_v(s) = \frac{K_p * (1 + T_1 * s)}{1 + K_p * K_s + T_1 * s}$ für P-Regler und PT₁ Strecke

Nachteil: Es ist nur das Führungsverhalten stationär genau, aber nicht das Störverhalten

- 3.) Verwendung eines I-Reglers (siehe nächster Kasten)

PT₁ Strecke mit I-Regler

Führungs-Üfkt: $F_W(s) = \frac{K_p * K_s}{K_p * K_s + s * (1 + T_1 * s)}$

Stör-Üfkt: $F_Z(s) = \frac{-K_s * s}{s * (1 + T_1 * s) + K_p * K_s}$

$F_Z(s=0) = 0$
 => Keine bleibende Regeldifferenz im Störverhalten
 => Eine konstante Störung z wirkt sich nicht auf die Regelgröße aus

Stationär genau?
 $F_W(s=0) = 1$
 => $w(x) = x(x) \Rightarrow x_d(\infty) = 0$
 => Stationär genau / keine bleibende Regeldifferenz

Ist der RK Schwingungsfähig?
 $\omega_0 = \frac{1}{T_1} \sqrt{\frac{K_p * K_s}{1 + T_1 * s}}$

Koeffizientenvergleich: $\omega_0 \sqrt{\frac{K_p * K_s}{1 + T_1 * s}} \Rightarrow$ Großes K_p macht den RK schnell

=> $D = \frac{1}{2 * T_1 * \omega_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{K_p * K_s * T_1}}$

Für große Verstärkungen K_p wird $D < 1$
 => RK wird Schwingungsfähig
 => Reglerverstärkung für eine ausreichende Dämpfung $D = 0,5 \dots 1$

PT₁ Strecke mit PI-Regler

= Parallelschalten von P- & I-Anteil mit Nachstellzeit T_N

$F_R(s) = \frac{Y(s)}{X_d(s)} = K_p * \frac{1}{T_N * s} + K_p * \frac{1 + T_N * s}{T_N * s}$

Sprungantwort PN-Diagramm

Üfkt des offenen Regelkreises: $F_0(s) = F_R * F_S = K_p * \frac{1 + T_N * s}{T_N * s} * \frac{K_s}{1 + T_1 * s}$

=> Wahl von T_N gemäß „dynamischer Kompensation“
 = Pol- / Nullstellenkompensation => $T_N = T_1$

Führungs-Üfkt: $F_W(s) = \frac{K_p * K_s}{K_p * K_s + T_N * s}$

Stör-Üfkt: $F_Z(s) = \frac{K_s}{1 + T_1 * s} * \frac{T_N * s}{K_p * K_s + T_N * s}$

Aber: Kompensations Pol ist im Störverhalten noch enthalten
 => RK wird nicht Schwingungsfähig

Pole: $s_{p1} = -\frac{1}{T_1}$ $s_{p2} = -\frac{K_p * K_s}{T_N}$

Stationär genau?
 $F_W(s=0) = 1$
 => $w(x) = x(x) \Rightarrow x_d(\infty) = 0$
 => Stationär genau / keine bleibende Regeldifferenz

Ist der RK Schwingungsfähig?
 => kein Schwingungsverhalten, Vergrößerung von K_p macht RK schneller

Führungssprungantwort:

Regelung einer PT₁ Strecke mit einem PID Regler

Übertragungsfkt des Reglers: $F_R(s) = K_p * \frac{(1 + T_V * s)(1 + T_N * s)}{T_N * s * (1 + T_D * s)}$ (real)

mit $T_D < 0,1 \dots 0,2 * \min\{T_N, T_V\}$

$F_R(s) = K_p * \frac{(1 + T_V * s)(1 + T_N * s)}{T_N * s}$ (ideal)

Sprungantwort des realen Reglers:
 $y(0) = \lim(s \rightarrow \infty) F_R(s) = K_p * \frac{1}{T_D}$

$y(\infty) = \lim(s \rightarrow 0) F_R(s) = \infty$

Üfkt offener Regelkreis: $F_0(s) = K_p * \frac{(1 + T_V * s)(1 + T_N * s)}{T_N * s} * \frac{K_s}{(1 + T_1 * s)(1 + T_2 * s)}$

=> Dyn. Kompensation beider Pole:
 => $T_V = T_1$ $T_N = T_2$

Führungs-Üfkt: $F_W(s) = \frac{K_p * K_s}{K_p * K_s + T_N * s}$

Stationär genau?
 $F_W(s=0) = 1 \Rightarrow$ stationär genau (wegen I-Anteil)

Ist der RK Schwingungsfähig?
 => Nicht Schwingungsfähigkeit

Führungssprungantwort:

Fragestellungen:

a) Wie groß muss K_p sein um nach 1sec 63% des Endwertes erreicht zu haben?
 Ausklammern in Form:
 $F_W(s) = A * \frac{1}{1 + T_V * s}$
 => Laplace Rücktrafo:
 $f_v(t) = A * (1 - e^{-t/T_V}) \Rightarrow$ Klammerterm muss = 0,63 sein
 => Für 1 Sekunde: $T_V = \dots = 1$

b) Für welchen Wert von K_p beträgt $x_d(\infty) = 0,1$ der Sprunghöhe?
 $x_d(\infty) = W(\infty) - X(\infty) = 0,1 * W(\infty)$
 mit $X(\infty) = F_W(s=0) * W(\infty)$

Regelung einer PT₂ Strecke mit PI-Regler

Üfkt offener Regelkreis: $F_0(s) = F_R(s) * F_S(s) = K_p * \frac{1 + T_V * s}{T_N * s} * \frac{K_s}{(1 + T_1 * s)(1 + T_2 * s)}$

=> Dyn. Kompensation des Pols mit der größeren Zeitkonstante
 d.h. $T_V = T_1 > T_2$

Führungs-Üfkt: $F_W(s) = \frac{K_p * K_s}{K_p * K_s + T_N * s(1 + T_2 * s)}$

Stationär genau?
 $F_W(s=0) = 1$
 => $w(x) = x(x) \Rightarrow x_d(\infty) = 0$
 => Stationär genau / keine bleibende Regeldifferenz (wegen I-Anteil)

Ist der RK Schwingungsfähig?
 => Für große K_p wird der RK schwingungsfähig
 => K_p muss als Kompromiss aus Schnelligkeit und Dämpfung gewählt werden

Führungssprungantwort:

Regelung einer PT₂ Strecke mit PD-T_N-Regler

Übertragungsfkt des Reglers: $F_R(s) = K_p * \frac{1 + T_V * s}{1 + T_D * s}$ (real)

$F_R(s) = K_p * (1 + T_V * s)$ (ideal)

T_V = Vorhaltezeit
 $T_D < 0,1 \dots 0,2 * T_V$ = Verzögerungszeitkonstante

Sprungantwort des realen Reglers:

=> Großes Stellsignal am Anfang => schneller Regler

Üfkt offener Regelkreis: $F_0(s) = F_R(s) * F_S(s) = K_p * (1 + T_V * s) * \frac{K_s}{(1 + T_1 * s)(1 + T_2 * s)}$

=> Dyn. Kompensation des Pols mit der größeren Zeitkonstante
 d.h. $T_V = T_1 > T_2$

Führungs-Üfkt: $F_W(s) = \frac{K_p * K_s}{K_p * K_s + 1 + T_2 * s}$

Stationär genau?
 $F_W(s=0) = \frac{K_p * K_s}{K_p * K_s + 1} < 1 \Rightarrow$ nicht stationär genau

Ist der RK Schwingungsfähig?
 => F_W hat PT₁ Verhalten => Nicht Schwingungsfähigkeit

Führungssprungantwort:

Fazit: Der PD-Regler ...

- hat eine bleibende Regeldifferenz $x_d(\infty)$
- erhöht die Dämpfung bzw. die Schnelligkeit im Regelkreis
- verstärkt Messrauschen der Regelgröße im Stellsignal vor allem bei kleinem T_D

Regelung einer PT₂ Strecke mit einem PID Regler

Übertragungsfkt des Reglers: $F_R(s) = K_p * \frac{(1 + T_V * s)(1 + T_N * s)}{T_N * s * (1 + T_D * s)}$ (real)

mit $T_D < 0,1 \dots 0,2 * \min\{T_N, T_V\}$

$F_R(s) = K_p * \frac{(1 + T_V * s)(1 + T_N * s)}{T_N * s}$ (ideal)

Sprungantwort des realen Reglers:
 $y(0) = \lim(s \rightarrow \infty) F_R(s) = K_p * \frac{1}{T_D}$

$y(\infty) = \lim(s \rightarrow 0) F_R(s) = \infty$

Üfkt offener Regelkreis: $F_0(s) = K_p * \frac{(1 + T_V * s)(1 + T_N * s)}{T_N * s} * \frac{K_s}{(1 + T_1 * s)(1 + T_2 * s)}$

=> Dyn. Kompensation beider Pole:
 => $T_V = T_1$ $T_N = T_2$

Führungs-Üfkt: $F_W(s) = \frac{K_p * K_s}{K_p * K_s + T_N * s}$

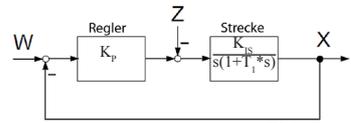
Stationär genau?
 $F_W(s=0) = 1 \Rightarrow$ stationär genau (wegen I-Anteil)

Ist der RK Schwingungsfähig?
 => Nicht Schwingungsfähigkeit

Führungssprungantwort:

Fazit: Vor- & Nachteile wie beim PD Regler
 Im Störverhalten treten die kompensierten Pole noch auf
 => Störverhalten langsamer als Führungsverhalten (geschl. RK ist schneller)

Regelung einer IT₁ Strecke mit P Regler



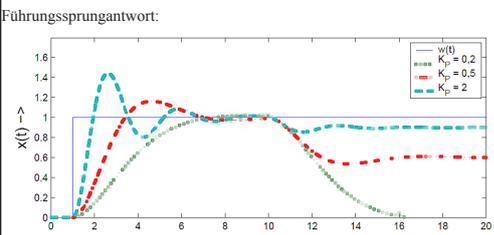
Üfkt offener Regelkreis: $F_o(s) = F_R(s) * F_S(s) = \frac{K_p * K_s}{s(1+T_1*s)}$

Führungs Üfkt: $F_w(s) = \frac{K_p * K_s}{K_p * K_s + s(1+T_1*s)}$

Stör Üfkt: $F_z(s) = \frac{-K_s}{s(1+T_1*s) + K_p * K_s}$

Ist der RK Schwingungsfähig?
=> R_k ist für $K_p > \frac{1}{4} \frac{1}{T_1 * K_s}$ schwingungsfähig (folgt aus Char. Gl.)

Stationär genau?
 $F_w(s=0) = 1$ => Stationär genau im Führungsverhalten
Aber: $F_z(s=0) \neq 0$ => Nicht stationär genau im Störverhalten



Regelung einer IT₁ Strecke mit I-Regler

=> Instabiler Regelkreis (Hurwitz)

Regelung einer IT₁ Strecke mit PI-Regler

$$F_o(s) = K_p * \frac{1 + T_N * s}{T_N * s} * \frac{K_s}{s(1+T_1*s)}$$

1. KEINE dynamische Kompensation bei IT_N Strecken

Char. Gl. = $K_p * K_s + T_N * s^2 = 0$
=> $s_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{K_p * K_s}{T_N}}$ => RK schwingt ungedämpft

2. Bei zwei I-Anteilen im RK (im Regler und in der Strecke) ist das Stabilitätsverhalten problematisch.

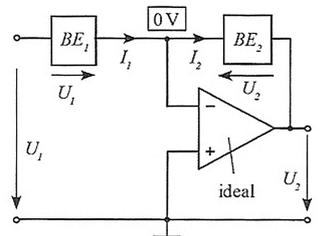
$$F_o(s) = \frac{-K_s * T_N * s}{T_N * s^2(1+T_1*s) - K_p * K_s(1+T_N*s)} \Rightarrow F_o(s=0) = 0$$

=> Störverhalten stationär genau

Realisierung elektrischer Regler

1.) Analog mittels OPV in invertierender Grundschaltung

$$F_R(s) = \frac{-BE_2}{BE_1}$$



z.B. PI-Regler mit $BE_1 = R$ und $BE_2 = R+C$

2.) Digitale Reglerrealisierung z.B. auf Mikrocontroller

- a) Analoges Eingangssignal abtasten und AD wandeln
- b) Berechnung des Regelalgorithmus / Differenzgleichung in Abtasttakt
- c) DA-Wandlung und Ausgabe des (treppenförmigen) Stellsignals

5. Stabilität linearer Regelkreise

Allgemein
Alle Polstellen bzw. Nullstellen der Char. Gleichung müssen in der linken s-Halbebene liegen

Hurwitz Kriterium
Char Gleichung: $Z_o(s) + N_o(s) = a_n * s^n + a_{n-1} * s^{n-1} + \dots + a_0 * s^0 = 0$

- Bedingung:
Alle Koeffizienten $a_0 \dots a_n$ sind von 0 verschieden und besitzen das gleiche Vorzeichen (d.h. es darf kein Vorzeichenwechsel vorhanden sein).
Die Gleichung in positive Form bringen!
- Bedingung:
Alle Hurwitz-Determinanten müssen positiv sein.
Matrix n x n

$$H = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

Größe je nach n
Koeffizienten mit Index > n mit 0 ersetzen

Hurwitz Determinanten (prüfen bis H_1):
Hier: Spezialfall $n = 3 \Rightarrow H = 3 \times 3 \Rightarrow a_5 = a_4 = 0$
 $H_1 = a_1 > 0$
 $H_2 = a_1 * a_2 - a_3 * a_0 > 0$
 $H_3 = a_1 * H_2 > 0$

Vereinfachtes Nyquist Kriterium

Voraussetzung:
Offener Regelkreis ist stabil
= Alle Pole von $F_o(s)$ liegen in der linken s-Halbebene bis auf höchstens einen Doppelpol im Ursprung

Kriterium:
Der geschl. Regelkreis ist stabil, wenn der Kritische Punkte -1 links der Ortskurve von $F_o(j\omega)$ liegt

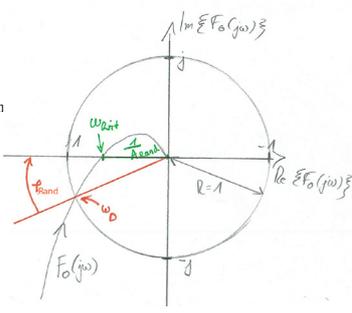
Lage des Pols:

- Fall 1: F_o schneidet kritischen Punkt
=> Dauerschwingung mit konstanter Amplitude
- Fall 2: Kritischer Punkt links von F_o
=> Amplitude der Schwingung verkleinert sich
=> RK stabil
- Fall 3: Kritischer Punkt rechts von F_o
=> Amplitude vergrößert sich
=> RK instabil

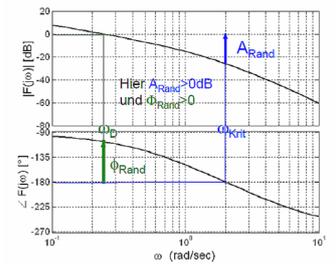
Amplituden- und Phasenrand ablesen

A_{Rand} = Amplitudenrand
=> Faktor, um den man die Verstärkung im RK erhöhen muss um genau am Stabilitätsrand zu sein
 ω_{krit} = kritische Frequenz

ϕ_{Rand} = Phasenrand
=> Um wieviel liegt die Phase von $F_o(j\omega)$ bei der Amplitude eins über -180°
 ω_D = Durchtrittsfrequenz



Im Bodediagramm:



Rechnen in dB

$$|F|_{dB} = 20 \log_{10} |F|$$

$$|F| = 10^{\frac{|F|_{dB}}{20}}$$

Überschwingen - Dämpfung - Phasenrand

$$D = \frac{|\ln \ddot{u}|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln \ddot{u})^2}}$$

F	F in dB
0,5	-6
1	0
2	6
4	12
10	20
100	40

ü	D	phi_Rand
4,3%	0,7	65°
10%	0,6	59°
20%	0,46	48°
50%	0,22	24°

Bedeutung von Amplituden- und Phasenrand:

ω_D = Durchtrittsfrequenz ist ein Maß für die Schnelligkeit
 $T_{AN} = \pi / \omega_D$
 ϕ_{Rand} = Je größer der Phasenrand desto größer die Dämpfung
 $D \sim \phi_{Rand}$

Entwurfsforderungen:
 $A_{Rand} = 4 \dots 10$
 $\phi_{Rand} = 50^\circ \dots 65^\circ$ für gutes Störverhalten
bei $A_{Rand} = 2 \dots 3 \Rightarrow \phi_{Rand} 30^\circ$

Zusammenhänge:

$$A_{Rand} = \frac{K_{PKrit}}{K_p}$$

$$\omega_{krit} \text{ bei } \text{Im}\{F_o(j\omega)\} = 0$$

$$K_{PKrit} = -\frac{1}{F_o(j*\omega_{krit})}$$

oder K_{PKrit} über Hurwitz Kriterium mit $H_2 = 0$