

Bsp: Zeichenfolge

7

A B A A C D B A

Anzahl der Zustände: $m=4$

Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(C) = \frac{1}{8}$$

$$P(D) = \frac{1}{8}$$

Informationsgehalt:

$$I(A) = \lg(2) \text{ bit} = 1 \text{ bit}$$

$$I(B) = \lg(4) \text{ bit} = 2 \text{ bit}$$

$$I(C) = \lg(8) \text{ bit} = 3 \text{ bit}$$

$$I(D) = \lg(8) \text{ bit} = 3 \text{ bit}$$

Informationsgehalt der Folge:

$$I_{\text{Folge}} = 4 \cdot I(A) + 2 \cdot I(B) + 1 \cdot I(C) + 1 \cdot I(D)$$

$$= 4 \cdot 1b + 2 \cdot 2b + 1 \cdot 3b + 1 \cdot 3b = 14 \text{ bit}$$

← wird benötigt, um die Folge zu übertragen

$$\hookrightarrow 8 \cdot H = 8 \cdot 1,75b = 14b$$

Entropie:

$$H = P(A) \cdot I(A) + P(B) \cdot I(B) + P(C) \cdot I(C) + P(D) \cdot I(D)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1b + \frac{1}{4} \cdot 2b + \frac{1}{8} \cdot 3b + \frac{1}{8} \cdot 3b = 1,75b$$

Entscheidungsgehalt (max. Entropie):

$$H_{\text{max}} = H_0 = \lg(m) \text{ bit} = \lg(4) \text{ bit} = 2 \text{ bit}$$

Entscheidungsgehalt der Folge:

$$H_{0 \text{ Folge}} = 8 \cdot H_0 = 16b$$

Redundanz:

$$R_{\text{Zeichen}} = H_{\text{max}} - H = 2b - 1,75b = 0,25b$$

$$r = \frac{R_{\text{Zeichen}}}{H_{\text{max}}} = \frac{0,25b}{2b} = 0,125 = 12,5\%$$

$$R_{\text{Folge}} = H_{0 \text{ Folge}} - I_{\text{Folge}} = 16b - 14b = 2b$$

Shannon - Fano - Kodierung

8

Zeichen	A	B	C	D
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
Gruppen gleicher P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
Kodierung	①	②		
Gruppen gleicher P		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
Kodierung		①	②	
Gruppen gleicher P			$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
Kodierung			①	②
Kodewort	1	01	001	000
"Herkömmliche" Kodierung	00	01	10	11

A B A A C D B A

"Herkömmlich": 00 01 00 00 10 11 01 00

Länge: $L_{\text{Folge}} = 16b$

Anzahl 0: 11, Anzahl 1: 5

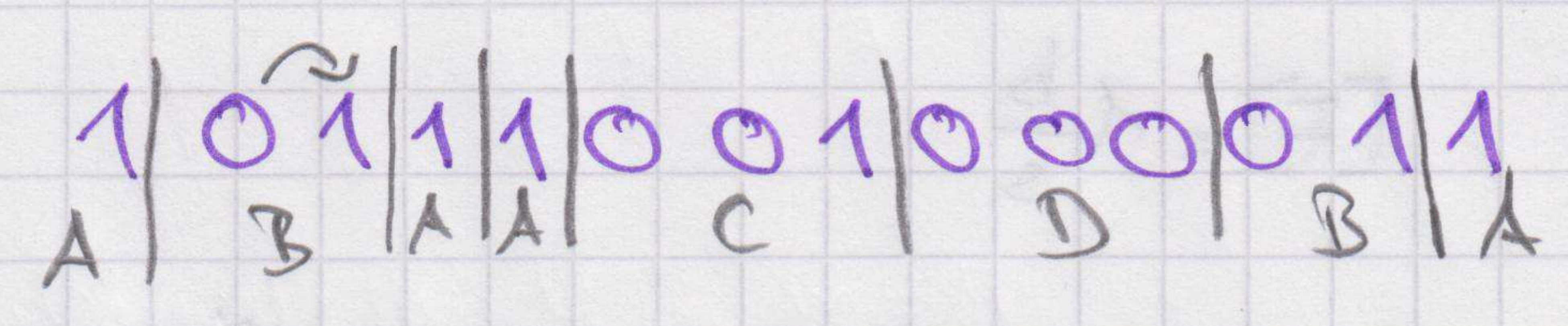
"Optimal": 1 01 1 1 001 000 01 1

Länge: $L_{\text{Folge}} = 14b$

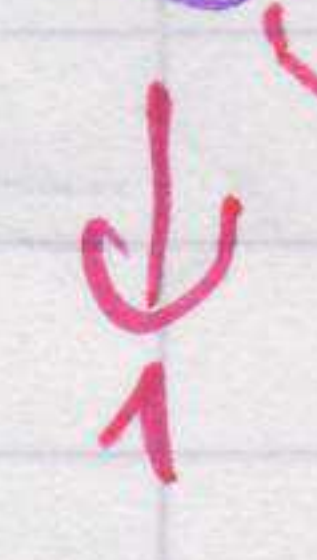
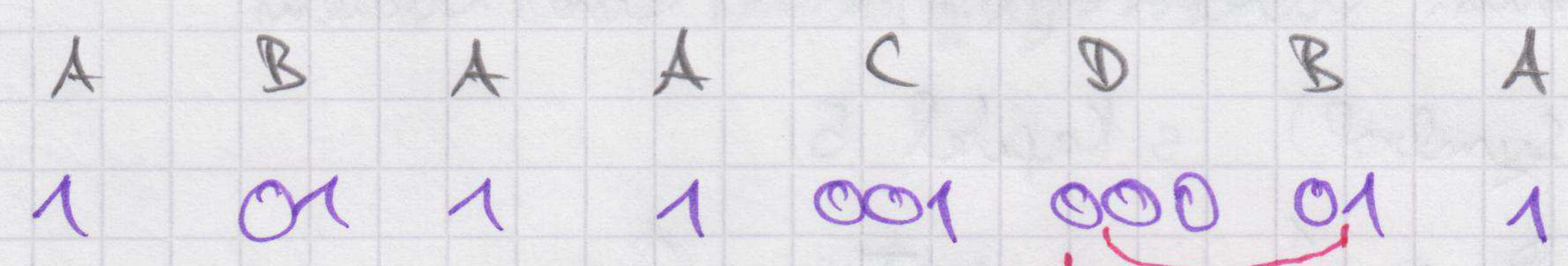
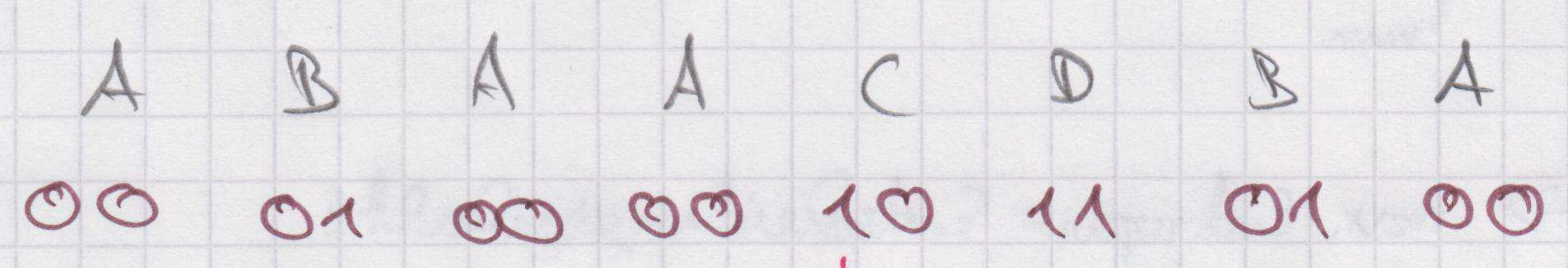
Anzahl 0: 7, Anzahl 1: 7

Gleich-
verteilung

Präfixcode: kein Kodewort darf der Anfang eines anderen Kodeworts sein!



Bsp: Bitfehler



kein Schutz gegen Bitfehler!
↳ deshalb Kanalcodierung

Morsecode:

- e .
- z ---..
- a .- Kein Präfixcode!
- b -...
- c -.-.

Übertragung der Nachricht

↓
Informationsfluß: $F = \frac{H}{T}$

$$[F] = 1 \frac{b}{s}$$

Maximal möglicher Informationsfluß in einem Übertragungskanal:

$$F_{max} = \frac{H_{max}}{T_{min}} = 2 \cdot B_K \cdot \lg(m) \text{ bit}$$

→ max. Entropie = Entscheidungsgelalt:

$$H_{max} = H_0 = \lg(m) \text{ bit}$$

m ... Anzahl der Zustände

→ min. Übertragungsdauer eines Zeichens

(Symbol) s. Kapitel 5

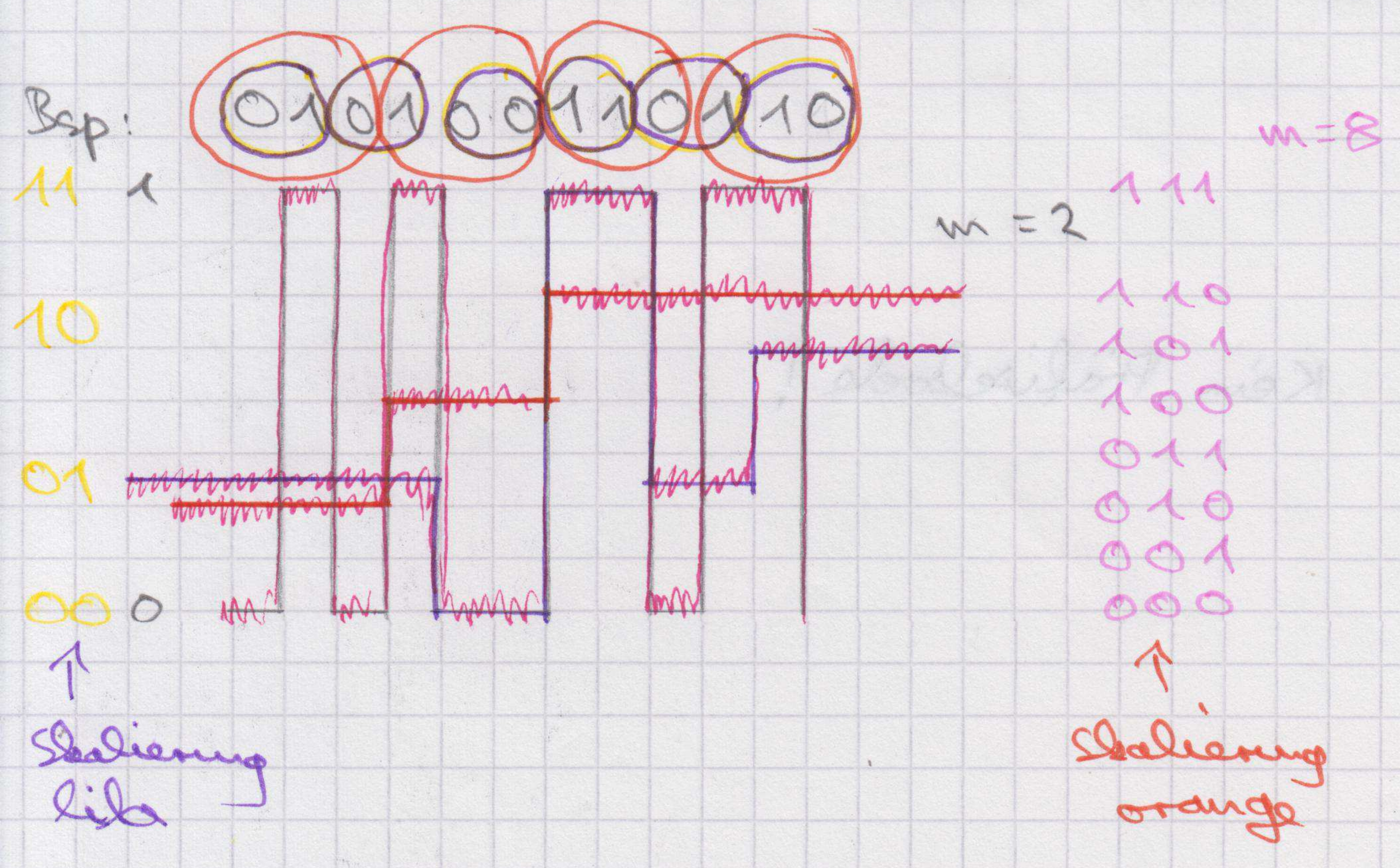
$$B_K = \frac{1}{2 T_{min}} \Leftrightarrow T_{min} = \frac{1}{2 B_K}$$

B_K ... Kanalbandbreite

Bsp: m = 2 Zustände

$$B_K = 100 \text{ KHz}$$

$$F_{max} = 2 B_K \cdot \lg(2) \text{ bit} = 2 B_K \text{ bit} = 2 \cdot 100 \text{ KHz bit} = 200 \text{ Kbs}^{-1}$$



$$m=4: F_{\max} = 2 \cdot 100 \text{ kHz} \cdot \log_2(4) \text{ bit} \\ = 400 \text{ Kbs}^{-1}$$

$$m=8: F_{\max} = 2 \cdot 100 \text{ kHz} \cdot \log_2(8) \text{ bit} \\ = 600 \text{ Kbs}^{-1}$$

→ Einfluss der Störungen (Rauschen) wächst mit m !

$$m_{\max} = \sqrt{1 + \frac{P_s}{P_N}} = \sqrt{1 + \text{SNR}}$$

$$H_{\max} = \log_2(m) \text{ bit} \\ = \log_2 \sqrt{1 + \text{SNR}} \text{ bit} \\ = \frac{1}{2} \log_2(1 + \text{SNR}) \text{ bit}$$

Maximal möglicher Informationsfluß über einen
Nebenkanal = Kanalkapazität

$$C_K = F_{\max} = 2 B_K \cdot \frac{1}{2} \log_2(1 + \text{SNR}) \text{ bit}$$

$$C_K = B_K \underbrace{\log_2(1 + \text{SNR})}_{\text{Kanalbandbreite } D_K} \text{ bit}$$

$$C_K = B_K \cdot D_K$$

Für $\text{SNR} \gg 1$:

$$m \approx \sqrt{\text{SNR}}$$

$$C_K \approx B_K \log_2(\text{SNR}) \text{ bit}$$

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10}(\text{SNR}) \text{ bit}$$

$$\text{SNR} = 10^{\frac{\text{SNR}_{\text{dB}}}{10}}$$

$$C_K \approx B_K \cdot \log_2(10^{\frac{\text{SNR}_{\text{dB}}}{10}}) \text{ bit}$$

$$C_K \approx B_K \cdot \text{SNR}_{\text{dB}} \cdot \underbrace{\frac{1}{10} \cdot \log_2(10)}_{\frac{1}{3}} \text{ bit}$$

$$C_K \approx \frac{1}{3} \cdot B_K \cdot \text{SNR}_{\text{dB}}$$

Bsp: Analog TV-Kanal

12

$$B_K = 5 \text{ MHz}$$

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 48 \text{ dB} \quad (\text{rauschfreies Analogsignal})$$

$$C_K \approx \frac{1}{3} \cdot B_K \cdot \text{SNR}_{\text{dB}}$$

$$\approx \frac{1}{3} \cdot 5 \text{ MHz} \cdot 48 \text{ bit}$$

$$\approx 80 \text{ Mbs}^{-1}$$

Annahme: Digitalsignal mit 5 Mbs^{-1}
→ 16 Digitalsignale

$$\begin{aligned} C_K &= B_K \cdot D_K \\ F_S &= B_S \cdot D_S \\ F_S &\leq C_K \\ B_S &\leq B_K \\ D_S &\leq D_K \\ &\uparrow \\ &\text{theoretisches "="} \end{aligned}$$

Bsp: Telefon

$$f_0 = 8 \text{ kHz} \quad (\text{Abtastfrequenz})$$

8 bit Digitalisierung

$$F = 8 \text{ kHz} \cdot 8 \text{ bit} = 64 \text{ Kbs}^{-1}$$

$$B_K = 4 \text{ kHz}$$